THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

le titre de Docteur-Ingénieur

par

MODJABI Seyed Shamsoddin

1re THÈSE : Flambement des poteaux en béton armé articulés aux deux extrémités.

2me THÈSE (propositions données par la Faculté) : Gélivité des sols.

Soutenues le 28 juin 1967 devant la Commission d'Examen.

MM. SIESTRUNCK		Président
ROBINSON	}	Examinateurs
VICHNIEVSKY	}	

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

le titre de Docteur-Ingénieur

par

MODJABI Seyed Shamsoddin

1re THÈSE : Flambement des poteaux en béton armé articulés aux deux extrémités.

2me THÈSE (propositions données par la Faculté) Gélivité des sols.

Soutenues le 28 juin 1967 devant la Commission d'Examen.

MM. SIESTRUNCK Président

ROBINSON
VICHNIEVSNY } Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

(Janvier 1967)

Doyen : **M. ZAMANSKY**

— PROFESSEURS —

GRASSÉ : T. Évolution des êtres organisés.
PRÉVOST : T. Chimie organique.
WYART : T. Minéralogie et cristallographie.
TEISSIER : T. Zoologie.
AUGER : T. Physique quantique et relativité.
MONNIER : T. Physiologie générale.
PIVETEAU : T. Paléontologie.
ROCARD : T. Physique E.N.S.
CARTAN : T. Mathématiques E.N.S.
LAFFITTE : T. Chimie générale.
N... : T. Géométrie supérieure.
COULOMB : T. Physique du globe.
CHRÉTIEN : T. Chimie minérale.
BOCQUET : T. Zoologie.
KASTLER : T. Physique E.N.S.
EPHRUSSI : T. Génétique.
GAUTHERET : T. Biologie végétale CPEM.
LUCAS R. : Recherches physiques.
THOMAS A. : T. Biologie.
MORAND : T. Physique enseignement.
SOLEILLET : T. Physique CPEM.
FORTIER : T. Mécanique expérimentale des fluides.
DRACH : T. Biologie maritime.
QUENEY : T. Météorologie et dynamique de l'atmosphère.
GALLIEN : T. Embryologie.
Mlle CAUCHOIS : T. Chimie Physique.
THELLIER : T. Physique du globe.
PONCIN : T. Mécanique générale.
DUBREIL : T. Arithmétique et théorie des nombres.
CAGNIARD : T. Géophysique appliquée.
CHAMPETIER : T. Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER : T. Micropaléontologie.
TRILLAT : Microscopie et diffraction électronique.
WIEMANN : T. Chimie organique et structurale.
VASSY : T. Physique de l'atmosphère.
DESTOUCHES : T. Théorie physique.
AMIEL : T. Chimie générale.
MATHIEU J.-P. : T. Physique optique.
COUTEAUX : T. Cytologie.
CHOQUET : T. Théorie des fonctions et topologie.
FELDMANN : T. Biologie végétale marine.
JOST : T. Physiologie comparée.
FORTET : T. Calcul des probabilités et physique mathématiques.
SCHWARTZ : T. Calcul différentiel et intégral.
CHOUARD : T. Physiologie végétale.
MALAVARD : T. Aviation (technique aéronautique).
BRELOT : T. Analyse supérieure.
EICHHORN : T. Botanique.
BENARD : T. Chimie appliquée.
DUGUE : T. Statistique mathématique.
SOULAIRAC : T. Psychophysiologie.
ULRICH : T. Physiologie végétale appliquée.
KIRRMANN : T. Théories chimiques.
CHADEFAUD : T. Botanique.
Mlle LE BRETON : T. Physiologie de la nutrition.
LELONG : T. Application de l'analyse à la géométrie.
DEVILLERS : T. Anatomie comparée.
EHRESMANN : T. Topologie algébrique.
FRANÇON : T. Physique SPCN.
GLANGEAUD : T. Géographie physique, géologie dynamique.
GODEMENT : T. Mathématiques MGP.
PISOT : T. Technique mathématiques de la physique.
ROCH : T. Géologie.
SCHATZMANN : T. Astrophysique.
TERMIER : T. Géologie générale.
ZAMANSKY : T. Mathématiques générales.
LENNUIER : T. Physique M.G.P.
ROUTHIER : T. Géologie appliquée.
Mme TONNELAT : T. Physique théorique.
DIXMIER : T. Mathématiques M.P.C.
SOUCHAY : T. Chimie générale.
AIGRAIN : T. Électrotechnique.
BRUSSET : T. Chimie systématique.
LEVY : T. Physique théorique des hautes énergies.
Mme CHAIX : T. Chimie biologique.
Mme HUREL PY : T. Biologie végétale CPEM.
PANNETIER : T. Chimie générale I.
NORMANT : T. Synthèse organique.
YVON : T. Théories physiques.
COTTE : T. Physique électricité.
DUBOIS J.-E. : T. Chimie organique physique.
LAMOTTE : T. Zoologie E.N.S.
OLMER : T. Énergétique générale.
GAUTHIER : T. Mécanique appliquée.
BARCHEWITZ : T. Chimie physique.
BROSSEL : T. Physique atomique.
BUSER : T. Physiologie comparée.
CAMUS : T. Physiologie végétale.
CURIEN : T. Minéralogie et cristallographie.
POSSOMPES : T. Zoologie.
PULLMANN : T. Chimie quantique.
TEILLAC : T. Physique nucléaire et radioactivité.
VILLE : T. Économétrie.
FREYMANN : T. Recherches physiques.
ROLLET : T. Chimie minérale.
Mlle JOSIEN : T. Chimie SPCN.
CHEVALLEY : T. Géométrie algébrique et théorie des groupes.
GERMAIN : T. Mécan. Théo. des fluides.
LUCAS G. : T. Géologie.
ALLARD : T. Chimie physique.
BERTHELOT : T. Physique des particules fondamentales.
BRICARD : T. Météorologie.
Mme ALBE-FESSARD : T. Psycho-physiologie.
M. JULIA : T. Étude des molécules naturelles complexes.
MAGAT : T. Physico-chimie des rayonnements.
MONOD : T. Chimie du métabolisme.
BRUN : T. Mécanique des fluides I.
Mme DUBREIL : T. Mathématiques (Agrégation).
Mme LELONG : T. Mathématiques II E.N.S.
BELLAIR : T. Géologie S.P.C.N.
BOUISSIÈRES : T. Radiochimie.
Mme COUTURE : T. Thermidynamique et mécanique.
FRANC : Biologie animale CPEM.
SCHNELL : T. Botanique tropicale.
STOLKOWSKI : T. Physiologie générale.
ACHER : T. Chimie biologique.
BAUDOIN : T. Biologie animale CPEM.
BEAUMONT : Biologie animale SPCN.
BLAMONT : Géophysique ionosphère.
BOUREAU : T. Botanique.
CURIE D. : Physique MGP.
DURAND-DELGA : T. Géologie.
HELLER : T. Physiologie végétale.
TORTRAT : T. Calcul des probabilités.
CAILLEUX : T. Géologie SPCN.
MAGNAN : T. Physique électricité.
DAUDEL : T. Mécanique ondulatoire.
Mme CHOQUET BRUHAT : T. Mécanique analytique et mécanique céleste.
Mlle VEIL : T. Physiologie générale.
LWOFF : T. Microbiologie.
SIESTRUNCK : T. Mécan. phys. et expérimentale.
CABANNES : T. Mécanique théorique.
CAIRE : T. Géographie physique et géologie dynamique.
COMOLET : T. Mécanique des fluides.
DELLOUE : T. Physique de l'exosphère.
HOUILLON : T. Biologie animale.
OLIVIER : T. Anthropologie.
SAMUEL : T. Mathématiques (ENS Jeunes filles).
DE POSSEL : T. Analyse numérique.
CHARLOT : T. Chimie analytique.
CHATELET : T. Chimie CPEM.
MATTLER : T. Physique SPCN.
AUBOUIN : T. Géologie.
Mme BENOIT-GUEUTAL : T. Physique nucléaire et radioactivité.
BOUGIS : Biologie végétale marine. Villefranche-sur-mer.
RIGAUDY : T. Chimie SPCN.
COLLONGUES : T. Chimie appliquée.
DUBERT : Biochimie.
NOZIÈRES : T. Physique fondamentale.
CADIOT : Chimie organique.
IVANOFF : T. Océanographie physique.
FRANÇOIS : Zoologie.
TALBOT : Génie chimique.
Mme NOUGARÈDE : Botanique.
BRUHAT : T. Mathématiques MPC.
FOURNET : Électricité générale.
DEHEUVELS : T. Mathématiques propédeutiques.
FURON : T. Géologie SPCN.
Mme GANS : T. Génétique.
GENEVES : Biologie végétale CPEM.
HUPE : T. Pétrographie.
HOLLANDE : T. Biologie générale.
LIONS : T. Analyse numérique.
MAITTE : T. Chimie organique.
NICOLAS : Géologie appliquée.
PANIGEL : Biologie générale.
RAVIER : T. Pétrographie.
MOREL F. : T. Physiologie comparée.
ROSEAU : T. Mécanique théorique des fluides.
ROUBINE : T. Électronique E.S.E.
SILBER : T. Chimie CPEM.
UEBERSFELD : T. Électronique.
THIRY : T. Mécanique céleste.
ABELES : T. Physique SPCN.
AMAT : T. Thermodynamique.
BALKANSKI : Physique M.P.C. 1.
LE CORRE : T. Électricité.
NATAF : T. Physique nucléaire et radioactivité.
ECHALIER : Biologie animale CPEM.
BARRAUD : T. Physique CPEM.
DARS : Géologie structurale et appliquée.
CAMEFORT : Botanique (agrégation).
VICHNIEWSKY : T. Mécanique industrielle.
SIGWALT : Chimie SPCN.
BLAQUIÈRE : Automatique.
BARUCH : Physique propédeutique.
ARNOUS : T. Physique théorique.
SLONINSKI : Génétique.
MALLIAVIN : T. Mathématiques propédeutiques.
GAUDEMAR : Chimie propédeutique.
BROUSSE : T. Mécanique théorique.
ROSCH : T. Astronomie.
GUY : T. Physique expérimentale.
LAZARD : T. Mathématiques MPC.
MOREL P. : Physique MPC.
ARSAC : Programmation.
LEFEBVRE : T. Chimie MPC.
BOK : Physique fondamentale.
CHAPEVILLE : Biochimie.
BENOIT : Physique CPEM.
RIO : Chimie CPEM.
JAUZEIB : Géologie ENS.
PREVOST G. : Biologie cellulaire.
FAVARD P. : Biologie animale CPEM.
Mme CHARNIAUX-COTTON : Évolution des êtres organisés.
Mlle FICINI : Chimie CPEM.
LEQUEUX : Astronomie.
COHEN TANNOUDJI : Physique atomique.
HERVÉ : T. Mathématiques.
Mme PECKER-WIMEL : T. Astrophysique.
TAVERNIER : Physique PC.
DURAND Michel : Biologie animale SPCN.
PASCAUD : Physiologie.
Mme PETIT : Biologie animale CPEM.
CAGNAC : Électricité.
FALK-VAIRANT : Physique nucléaire.
KRASNER : T. Mathématiques.
BENZECRI : T. Statistiques.
VINH MAU : Physique M.G.P.
DUQUESNES : Physique CPEM.
SCHUTZENBERGER : T. Programmation.
TREMILLON : Chimie MPC.
FAYARD : Chimie MPC.
BUVET : Chimie CPEM.
AUTHIER : Minéralogie et cristallographie.
BONNEFILLE : Électrotechnique.
Mme PUISEUX DAO : Biologie végétale.
BERGER : T. Géométrie supérieure.
Mlle LIBERMANN : T. Mathématiques.
DEDONDER : T. Biologie cellulaire.
DUFOUR : T. Électronique I.U.T.
SCHAAL : Chimie CPEM.
BAUCHOT : Anatomie comparée.
LANCE : BV CPEM.
GIRAUD : Botanique E.N.S.
HULIN : Physique P C.
VIGIER : Génétique.
GUERN : Biologie végétale.
SLODZIAN : Physique CPEM.
LACOMBE : Logique mathématique.
TAVLITZKI : Biologie cellulaire.
ARVIEU : Physique CPEM.
TAXI : B.A. CPEM.
COLLENOT : B.A. CPEM.
BASSELIER : Chimie propédeutique.
BADOUAL : Électronique I. UT.

Le secrétaire général,
R. POULLAIN.

En témoignage de reconnaissance
à mon Peuple,
qui a tant souffert.....

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546604_0086

...A ma Mère

RÉSUMÉ

La méthode de prévision des charges de flambement des poteaux en béton armé de P. FAESSEL, est fondée sur une représentation géométrique suggestive et s'adapte aisément au calcul numérique par ordinateur. Cette méthode est d'abord exposée.

Ses prévisions sont ensuite comparées aux résultats expérimentaux pour 165 essais décrits dans la littérature. La comparaison apparaît comme favorable.

Des essais de poteaux à section en U spécialement entrepris sont ensuite décrits. Ils permettent de juger que la méthode de P. FAESSEL est valable pour les poteaux à plan moyen de toutes formes de section.

ZUSAMMENFASSUNG

Die von P. FAESSEL verarbeitete Voraussagemethode von Knickbelastungen von Stahlbetonsaülen wurde auf eine beeindrückende geometrische Darlegung begründet und passt der mit einer Rechenanlage ausgeführten Zahlenrechnung leicht. Die Methode wird gleich anfangs vorgetragt.

Ihre Voraussagen werden nachfolgend den für 165 in der Literatur beschriebene Versuche ermittelnten Untersuchungsergebnissen zusammengestellt. Als günstig erscheint der Vergleich.

Speziell untergenommene Versuche mi U-Querschnittsaülen werden anschliessend beschrieben. Durch diese kann urteilt werden, dass die Methode Von P. FAESSEL für mit irgender Querschnittsform der Mittelebene versehene Stützen gültig ist.

SUMMARY

The method of P. FAESSEL for the forecasting of the buckling loads of the reinforced concrete columns lies upon a suggestive geometrical figuration and fits readily for the numerical calculation with the use of computers. This method is explained at first.

Its forecastings are after that compared to the exprimental data of the 165 tests which are described in the litterature. The comparison seems to be favourable.

Tests of U-shaped cross-section columns, specially done, are described afterwards. They allow to think that the P. FAESSEL's method is valuable for the buckling in a median plane of the columns of all shapes of cross section.

RESUMEN

El método de previsión de las cargas de pandeo de las columnas de hormigón armado de P. FAESSEL, se funda en una representación geométrica sugestiva y se adapta fácilmente al cálculo numérico por computador electrónico. Este método es expuesto, en primer lugar.

Sus previsiones son comparadas, acto seguido, con los resultados experimentales para 165 ensayos descritos en la literatura. La comparación se presenta, pues, como favorable.

Los ensayos de columnas de sección en U, especialmente, emprendidos, son descritos a continuación. Estos ensayos permiten apreciar que el método de P. FAESSEL es perfectamente valedero para las columnas de plano medio de cualquier forma de sección.

FLAMBEMENT DES POTEAUX ARTICULÉS AUX DEUX EXTRÉMITÉS

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE DE P. FAESSEL

Nous considérons exclusivement dans ce qui suit des poteaux en béton armé de section constante, à plan moyen, articulés aux deux extrémités dans ce plan. Précisons que, conformément à l'usage, nous entendons par plan moyen, un plan de symétrie commun au béton et armatures du poteau, et contenant l'effort appliqué. Nous supposerons que ce plan demeure plan moyen lors de l'application de l'effort jusqu'au flambement inclusivement. Nous nous bornons enfin au cas où les excentricités de la force extérieure sont égales aux deux extrémités de la pièce et où la forme de la fibre moyenne du poteau avant déformation est symétrique par rapport à la perpendiculaire à la corde élevée en son milieu. Les deux cas extrêmes qui peuvent se présenter dans ces conditions sont représentés à la figure 1.

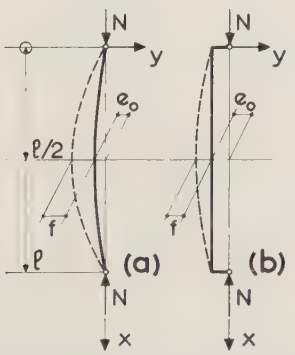


Fig. 1.

Représentation goémétrique de P. FAESSEL

Cette représentation repose sur l'hypothèse que la déformée du poteau est sinusoïdale.

Cette hypothèse, corroborée par les essais, est communément admise à titre de bonne approximation. Elle implique que l'équilibre de l'ensemble du poteau découle de celui d'une section, en principe quelconque, en fait la section médiane parce que la plus commode et la plus significative.

L'hypothèse de la déformée sinusoïdale implique en outre une relation entre la flèche et la courbure de déformation au droit de la section médiane. Elle s'exprime en effet par l'équation :

$$y - y_0 = f \sin \frac{\pi x}{l} \tag{1}$$

les axes étant définis à la figure 1 :

y étant l'ordonnée de la déformée;
y_0 l'ordonnée de la fibre moyenne avant déformation (dans le cas a, c'est une fonction variable; dans le cas b, une constante);
f la flèche à mi-hauteur;
l la hauteur entre articulations.

L'équation (1) devient dans la section médiane :

$$e = e_0 + f \tag{2}$$

e_0 étant l'excentricité initiale, c'est-à-dire avant déformation, de la force extérieure;
f étant la flèche;
e enfin étant l'excentricité de la force extérieure à l'état d'équilibre.

La courbure de déformation est la dérivée seconde de $y - y_0$ par rapport à x, soit en valeur absolue dans la section médiane :

$$\frac{1}{r} = f \frac{\pi^2}{l^2} \tag{3}$$

Des équations (2) et (3) découle :

$$e = e_0 + \frac{l^2}{\pi^2} \frac{1}{r} \tag{4}$$

Par ailleurs il existe une relation d'équilibre interne d'ordre mécanique entre l'intensité N de la force extérieure son excentricité e dans la section médiane et la courbure du poteau au droit de cette dernière $\frac{1}{r}$:

$$\Phi \left(\mathrm{N}, e, \frac{1}{r} \right) = 0 \tag{5}$$

la fonction Φ dépendant des caractéristiques du poteau.

Les deux relations (4) et (5) résolvent le problème de l'équilibre du poteau. Pour en faciliter la discussion, représentons géométriquement ces relations par rapport à trois axes rectangulaires en prenant comme coordonnées cartésiennes les quantités N, $1/r$ et e. Projetons la

figure obtenue sur le plan O $1/r$, Oe. Le plan de bout (4) se projette suivant une droite D. La surface (5), dite surface mécanique du poteau, peut être définie par ses lignes de niveau N = *cte* et est représentée en projection sur le plan en cause par le réseau de ces courbes. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe de trois valeurs N, $1/r$ et e satisfassent aux équations d'équilibre est que ces valeurs soient les coordonnées d'une intersection de la droite D et de la courbe de niveau N. Mais certains points d'intersection peuvent conduire à des états d'équilibre instables et n'ont ainsi qu'un intérêt formel. Reportons nous à la figure 2, qui anticipe sur ce qui suit quant à la forme des courbes N. Supposons le

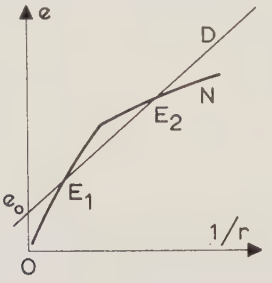


FIG. 2.

poteau en équilibre dans les conditions E_1. Écartons-le de sa position d'équilibre par augmentation de sa courbure. En raison des conditions géométriques de déformation du poteau l'excentricité du point de passage de la force extérieure dans sa section médiane, dite excentricité externe, va demeurer liée à la courbure par l'équation (4), c'est-à-dire que son point figuratif va se déplacer sur la droite D. En raison de la constitution du poteau lui-même, l'excentricité dite interne de la résultante des efforts internes développés sur la section médiane, va demeurer liée à la courbure par l'équation (5) et son point figuratif va décrire la courbe N. Au point E_1 considéré, l'excentricité externe croit ainsi moins vite que l'excentricité interne. La réaction du poteau à la déformation complémentaire imposée va le ramener à sa position d'équilibre. Cette dernière est donc stable. Ce serait l'inverse au point E_2 : l'équilibre y est instable.

Allure de la surface mécanique.

Proposons-nous de discuter le problème de l'équilibre. Il nous faut connaître l'allure de la surface mécanique pour le faire qualitativement tout d'abord.

Pour une valeur fixe et petite de l'effort normal N, l'équilibre interne de la section médiane diffère peu d'un équilibre de flexion simple. La courbe de niveau correspondante a donc la forme du diagramme flèche — moment dans l'essai de flexion d'une poutre sur appuis simples. Dans le cas où la rupture en flexion simple surviendrait par l'acier, cette courbe (fig. 3) se compose de trois segments légèrement courbes, dessinant une ligne brisée. Le segment OF correspond au poteau non fissuré; le segment FP au poteau fissuré par flexion, côté tendu. Sur l'étendue du segment PU, les aciers tendus ont dépassé leur limite d'élasticité. Ce segment est pratiquement parallèle à l'axe O $1/r$ si les aciers du poteau sont des aciers naturels, à peine incliné sur lui s'ils sont écrouis. Dans les deux cas, la pente de la droite D étant toujours notable, aucun point de PU ne peut correspondre à un état d'équilibre stable. Il convient ainsi de regarder P comme le point terminal de la ligne de niveau.

Si la valeur de N est plus élevée, il peut manquer une partie du segment FP et, si elle est encore plus élevée,

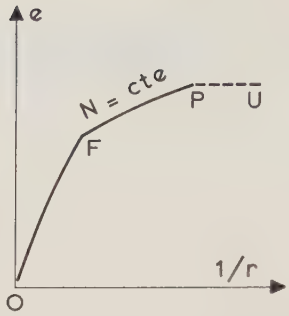


FIG. 3.

FP peut manquer tout entier, de même qu'un tronçon de OF. Qu'on imagine la pièce soumise à une sollicitation dont le point figuratif décrirait la courbe de niveau N : la rupture surviendrait par écrasement du béton sur le côté le plus sollicité de la pièce; l'autre côté ne serait pas fissuré si le point terminal était sur OF, présenterait des fissures de flexion de largeur modérée si ce point était sur FP et serait enfin largement fissuré si ce point atteignait P.

Pour rendre sensible la disposition relative des différentes courbes de niveau ainsi que l'allure des lieux des points E et P lorsque N varie, référons-nous à un poteau fait d'un matériau linéairement élastique. On a pour un tel poteau :

$$\frac{1}{r} = \frac{Ne}{EI} \tag{6}$$

E étant le module de Young du matériau,
I le moment d'inertie de la section transversale du poteau.

L'équation (6) définit un paraboloïde hyperbolique dont les génératrices parallèles à O $1/r$, Oe sont les courbes de niveau N. Elles se projettent sur O $1/r$, Oe suivant des droites passant par l'origine dont l'équation (où N joue le rôle d'un paramètre) est :

$$e = \frac{EI}{N}\frac{1}{r} \tag{7}$$

Ces lignes de niveau se classent de Oe vers O $1/r$ dans le sens des N croissants comme le montre la figure 4.

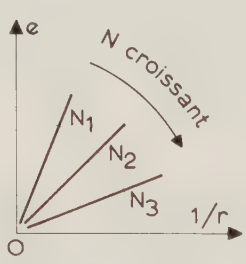


FIG. 4.

Pour obtenir les limites et lieux remarquables de la surface mécanique du poteau élastique, exprimons que la contrainte sur une fibre extrême atteint une valeur donnée. La formule classique

$$\sigma = N\left(\frac{1}{S} + \frac{ez}{I}\right) \tag{8}$$

σ étant la contrainte au point d'ordonnée (algébrique) z dans la section d'aire S, se transforme par élimination de N au moyen de l'équation (6) en :

$$e = \frac{\dfrac{i^2}{r}}{\dfrac{\sigma}{E} - \dfrac{z}{r}} \tag{9}$$

i étant le rayon de giration de la section transversale du poteau. Le lieu des points où la contrainte de traction sur la fibre extrême tendue d'ordonnée $z = -v$ atteint la valeur $\sigma = -\sigma_1$ est l'hyperbole :

$$e = \frac{\frac{i^2}{r}}{\frac{v}{r} - \frac{\sigma_1}{E}} \qquad (10)$$

dont l'arc utile, situé dans le quadrant positif des axes O $1/r$ et Oe, admet comme asymptotes deux parallèles aux axes : la parallèle à O $1/r$ dont l'ordonnée i^2/v est le rayon vecteur du noyau central de la section, et la parallèle à Oe dont l'abscisse σ_1/Ev est la courbure en flexion simple lorsque la contrainte de traction extrême atteint σ_1.

De même, le lieu des points où la contrainte de compression sur la fibre extrême comprimée d'ordonnée $z = v'$ atteint la valeur $\sigma = \sigma'_1$ est l'hyperbole :

$$e = \frac{\frac{i^2}{r}}{\frac{\sigma'_1}{E} - \frac{v'}{r}} \qquad (11)$$

L'arc utile de cette hyperbole admet pour asymptote la parallèle à Oe d'abscisse $\sigma'_1/E\,v'$; il passe par l'origine où le coefficient angulaire de sa tangente est égale à i^2E/σ'_1.

Supposons que le matériau dont est fait notre poteau élastique soit fragile et moins résistant à la traction qu'à la compression ($\sigma_1 < \sigma'_1$). La surface mécanique relative audit poteau, limitée par les hyperboles de rupture par traction et par compression prendra l'allure représentée à la figure 5.

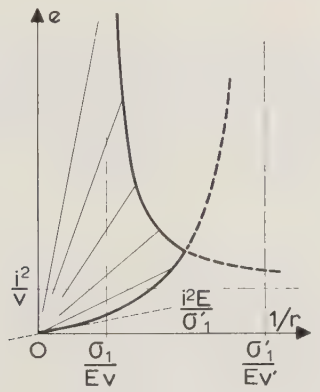


Fig. 5.

On infère de ce qui précède les caractères essentiels de la surface mécanique d'une section de poteau en béton armé (fig. 6). Les lignes de niveau se classent de Oe vers 01 $/r$ dans le sens des N croissants. Elles se composent de un ou deux segments selon la valeur de N. La courbure, faible, de ces segments tourne la concavité vers les $1/r$ croissants. Il existe deux lieux hyperboliques relatifs à la traction du côté tendu de la section : le lieu $F_0\,F_1$ des points F figuratifs des conditions de fissuration; le lieu $P_0\,P_1$ des points P de plastification des aciers tendus. L'hyperbole, frontière de compression pour le poteau élastique, se transforme ici en une courbe parabolique qui est tangente en O à l'axe $1/r$, parce que le module à prendre en compte dans le calcul du coefficient angulaire de sa tangente en O est le module tangent du béton (et de l'acier plastifié) lequel est nul sous la contrainte de

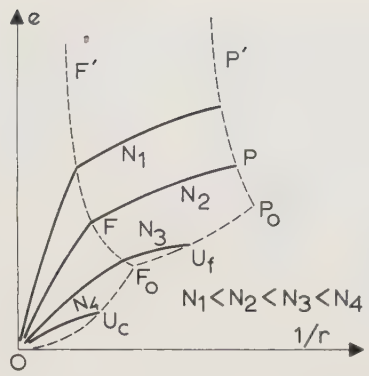


Fig. 6.

rupture par compression. A cette courbe parabolique, fait suite de F_0 en P_0 un second segment d'allure également parabolique.

Équilibre et flambement au point de vue qualitatif.

Imaginons que l'on applique à un poteau une charge croissante sans faire varier l'excentricité initiale. Pour chaque valeur N de la charge, les conditions d'équilibre sont définies par les coordonnées de l'intersection de la ligne de niveau N de la surface mécanique avec la droite D qui demeure fixe. Sous faible charge, la ligne de niveau N, voisine de l'axe Oe, coupe certainement la droite D, et un équilibre stable est possible. Il en est ainsi jusqu'à une charge critique N_C telle que les lignes de niveau relatives à des charges supérieures ne coupent plus la droite D, ce qui exclut toute possibilité d'équilibre. La ligne N_C touche encore la droite D mais ne la coupe pas. Cela est possible de deux manières différentes.

Tout d'abord la ligne de niveau N_C peut être tangente à la droite D en un point C distinct de son extrémité (fig. 7). Dans les conditions de sollicitation définies par le point C le poteau n'est pas rompu, sa section la plus sollicitée, la section médiane, résiste. On pourrait même, sous la même charge, augmenter l'excentricité et la courbure — en changeant les conditions d'appui de la pièce — c'est-à-dire décrire la ligne de niveau N_C au-delà de C vers les courbures croissantes sans provoquer la rupture avant d'avoir atteint une frontière de la surface mécanique. Il est plus aisé de ne pas changer les conditions d'appui et il est possible de décrire la droite D au-delà de C vers les excentricités croissantes en opérant à déformation contrôlée, ce que permettent certaines machines d'essai. Les équilibres ainsi imposés sont instables. Eu égard à la position de leurs points figuratifs tel que I sur les lignes de niveau (fig. 7), on s'explique que l'on

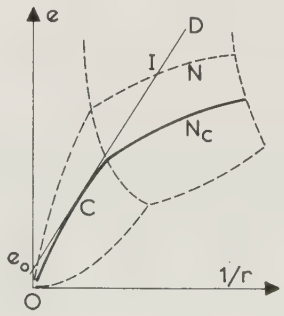
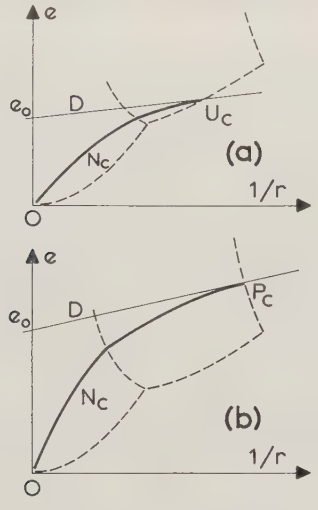


Fig. 7

constate la décroissance de la charge quand on augmente la déformation. Si l'on opère à charge contrôlée et que l'on cherche à dépasser N_C l'équilibre n'est plus possible et les phénomènes deviennent dynamiques : les points figuratifs des excentricités externe et interne décrivent respectivement la droite D et la courbe N_C jusqu'à rupture du poteau. La rupture n'étant point survenue en C, on dit que le flambement s'est produit par divergence d'équilibre. Eu égard à la forme des courbes de niveau, il apparaît que les points F de ces dernières (fig. 6) joueront le rôle de point C de façon préférentielle pour les poteaux élancés, parce que leurs droites D présentent des coefficients angulaires élevés. C'est effectivement ce que l'on observe aux essais : la charge critique est souvent de peu supérieure à la charge d'apparition de la première fissure.

Le second cas qui peut survenir est que la courbe de niveau correspondant à la charge critique N_C touche la droite D en son point terminal situé sur une frontière de la surface mécanique (fig. 8). A l'inverse du cas précédent, il n'est pas possible de trouver sur la droite D des points



d'équilibre au-delà du point terminal de N : franchie la frontière de la surface mécanique, la section médiane du poteau est rompue; le flambement se produit ainsi par rupture de section. Il y a cependant dans cette appréciation quelque chose de conventionnel. Quand la rupture de la section survient par le béton (fig. 8 *a*) l'extrémité de la courbe N_C se termine par un crochet qui possède une amorce de branche descendante. Quand la rupture de la section survient par l'acier (fig. 8 *b*) il existe au delà du point P_C un palier ou quasi-palier. Dans les deux cas la droite D est tangente à la courbe N_C dans sa région terminale; elle ne lui est pas sécante en un point terminal. La rupture du poteau est due en fait à un flambement par divergence d'équilibre. La déformation au-delà du point terminal qui suffit à provoquer la rupture physique du poteau dans sa section médiane est très petite dans le cas (*a*) de la figure 8, peu accentuée dans le cas (*b*). C'est cette circonstance, qui ne tient pas à l'essentiel, mais est importante quant aux apparences observées, qui justifie la qualification de flambement par rupture de section.

On retrouve la même opposition entre le phénomène réel et sa qualification dans la rupture des poteaux courts sous charge centrée. La charge ultime N_C d'un

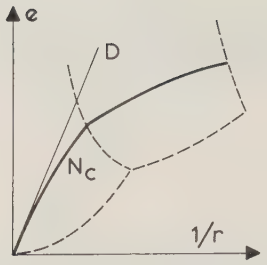


FIG. 9.

tel poteau correspond à celle de la ligne de niveau de sa surface mécanique qui est tangente à l'origine à sa droite D (fig. 9). Sur toute ligne de niveau N telle que $N < N_C$ l'origine est en effet un point figuratif d'équilibre stable, tandis que sur toute ligne telle que $N > N_C$ un équilibre instable correspond à l'origine. Nous trouvons là exactement les conditions d'un flambement par divergence d'équilibre, qui n'est pas, dans la pratique, considéré comme tel.

Ce cas du poteau centré est particulièrement intéressant parce que l'on peut montrer que la représentation de P. FAESSEL conduit pour la charge ultime à l'évaluation d'Engesser. Imaginons en effet une déformation infinitésimale du poteau en équilibre sous sa charge ultime N_C. Le point figuratif de l'équilibre modifié, de coordonnées δe et $\delta\, 1/r$ devra se trouver sur la droite D, d'où

$$\delta e = \frac{l^2}{\pi^2}\,\delta\,\frac{1}{r} \qquad (12)$$

Il devra se trouver également sur la courbe de niveau N_C tangente à la droite D, d'où :

$$\frac{\delta e N_C}{E_p I_p} = \delta\,\frac{1}{r} \qquad (13)$$

I_p étant le moment d'inertie de la section du poteau et E_p le module tangent de son matériau (complexe) constitutif sous l'effort centré N_C. Des égalités (12) et (13) résulte :

$$N_C = \frac{\pi^2 E_p I_p}{l^2} \qquad (14)$$

formule d'Engesser.

Calcul des charges de flambement.

La représentation de P. Faessel peut offrir un moyen de calcul si l'on peut évaluer commodément les coordonnées de la surface mécanique S. Or c'est possible en adoptant comme coordonnées paramétriques de S, d'une part la courbure $1/r$ et d'autre part le raccourcissement relatif du béton ε'_b sur la fibre extrême comprimée (ou la plus comprimée) de la section médiane. Connaissant un couple de ces deux coordonnées, on en déduit la distance x de l'axe neutre dans la section à la fibre extrême en cause par la relation :

$$\frac{\varepsilon'_b}{x} = \frac{1}{r} \qquad (15)$$

La loi de conservation des sections planes donne alors la déformation longitudinale relative en tous les points de la section. Les contraintes peuvent en être déduites par application des lois déformations-contraintes des matériaux; par intégration on obtient ensuite l'effort normal et l'excentricité interne.

Le programme de calcul de P. Faessel suppose nulle la résistance à la traction du béton et permet d'adopter pour le béton comprimé l'une des deux lois déformation-contrainte suivantes :

(16) $$\frac{\sigma'}{\sigma'_j} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon'_u}\left(2 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon'_u}\right)$$

(17) $$\frac{\sigma'}{\sigma'_j} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon'_u}\,\frac{2}{1 + \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon'_u}\right)^2}$$

Dans ces expressions les symboles ont les significations ci-après :

ε' raccourcissement relatif du béton au point considéré;

σ' contrainte normale du béton au point considéré;

σ'_j résistance du béton c'est-à-dire contrainte de rupture par compression simple mesurée sur cylindre au jour j de l'essai;

ε'_u raccourcissement relatif du béton sous la contrainte σ'_j.

La loi parabolique (16) ne peut être employée pour des déformations ε' supérieures à ε'_u. La loi (17) possède en revanche (Réf. 1) une branche descendante utilisable (fig. 10). En ce qui concerne l'acier, le programme offre le choix entre les deux lois recommandées par le Comité Européen du Béton (C.E.B.), l'une pour les aciers naturels, l'autre pour les aciers écrouis.

Les opérations de détermination d'une charge de flambement comportent le calcul des coordonnées d'équilibre pour une série de valeurs de la courbure en progression arithmétique.

$$\frac{1}{\rho}, \frac{2}{\rho}, \frac{3}{\rho}, \cdots \text{ etc}$$

dont la raison $1/\rho$ peut être librement choisie. A l'abscisse $1/r = k/\rho$, par exemple, le calcul de l'excentricité externe est immédiat par la formule (4) qui définit la droite D. L'excentricité interne lui est égalée par approximations successives sur la valeur de ε'. Cet ajustement conduit à une valeur N_k de l'effort normal. Si l'excentricité initiale e_0 n'est pas nulle et si la valeur de la raison $1/\rho$ a été convenablement choisie assez petite, la suite des valeurs

$$N_1, N_2, \ldots\ldots N_k, \ldots\ldots$$

est tout d'abord croissante. La machine compare les valeurs successives au fur et à mesure qu'elle les obtient; elle s'arrête dès qu'elle trouve qu'une valeur est inférieure à la précédente et imprime cette dernière, résultat cherché du calcul. Cette suite d'opérations est illustrée par la figure 11. Si l'excentricité initiale est nulle, la valeur N_2 calculée à l'abscisse $2/\rho$ est inférieure à la

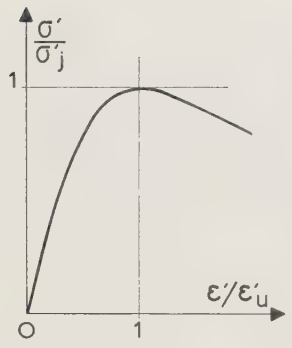


Fig. 10.

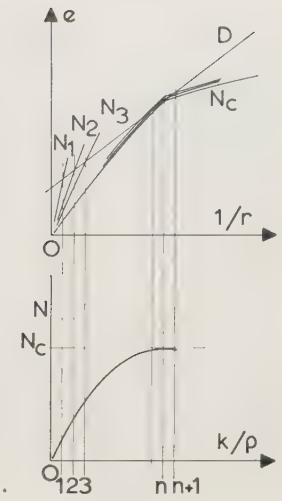


Fig. 11.

valeur N_1 précédente et la machine donne cette dernière comme charge de flambement.

Revenons sur le processus d'ajustement de l'excentricité interne à l'excentricité externe par approximations successives. La machine effectue le premier calcul des forces internes à partir d'une valeur de ε', ε'_{max}, qui fait partie des données fournies par l'utilisateur du programme dans chaque cas particulier. Elle trouve une excentricité interne qu'elle constate être trop petite, ce qui signifie que la valeur ε'_{max} de ε' est trop grande. La machine adopte alors la valeur $\varepsilon'_{max}/2$. Si l'excentricité interne est trop petite elle adoptera à l'approximation suivante la valeur médiane de l'intervalle 0, $\varepsilon'_{max}/2$; si elle est trop grande, celle de l'intervalle $\varepsilon'_{max}/2$, ε'_{max}. Elle continuera ainsi par dichotomie des intervalles successifs des valeurs de ε', chaque fois dans le sens qui conduit au rapprochement des deux déterminations de l'excentricité. Elle s'arrêtera quand les valeurs obtenues ne différeront pas plus d'une unité de leur quatrième chiffre significatif. Ainsi donc il est essentiel que, dans le choix de ε'_{max}, l'utilisateur adopte une valeur assez grande pour être sûrement supérieure à la valeur cherchée de ε'. Avec la loi (16) cette valeur ne peut être supérieure à ε'_u. Il ne faudra ainsi adopter la loi (16) que lorsque l'on sera sûr que ε' n'atteint pas ε'_u : ce sera le cas des poteaux très élancés. Le plus simple, à défaut d'expérience du calcul, est d'adopter dans tous les cas la loi (17) et une valeur très grande de ε'_{max}, soit $2\ \varepsilon'_u$; la dépense supplémentaire de temps-machine qui peut en résulter est très petite en valeur relative et ne saurait entrer en balance avec la sécurité donnée au calcul.

COMPARAISON DE LA MÉTHODE DE P. FAESSEL AUX RÉSULTATS DES ESSAIS DE COURTE DURÉE

On trouve dans la littérature les comptes rendus d'un certain nombre d'essais de flambement de poteaux à plan moyen, articulés aux deux extrémités, et dont l'excentricité de la charge répond aux conditions de la figure 1.

Nous comparons ci-après les charges de flambement mesurées aux essais pour ces poteaux avec celles que nous avons calculées par la méthode de P. Faessel. Pour l'application de cette méthode nous avons choisi la loi (17) comme diagramme déformations-contraintes du béton. Nous avons estimé à $2\,^0/_{00}$ la valeur de ε'_u en raison de ce qu'il s'agissait d'essais de courte durée, et nous nous sommes assurés que la valeur choisie dans chaque cas pour ε'_{max} était supérieure à la valeur de ε' à l'équilibre ultime. Mais nous avons éprouvé des difficultés à choisir dans certains cas la valeur à admettre pour σ'_j en raison des modalités différentes de mesure des résistances du béton adop-

TABLEAU A

ESSAIS DE O. BAUMANN ; Première série									
n°	Section	ℓ	λ	e_o/h_t	ϖ	σ_e	σ'_j	$\frac{N_{cal}}{B\sigma'_j}$	$\frac{N_{exp}}{N_{cal}}$
I	10 x 20	321	111	0	1,6	2993	155	0,8147	1,069
Ia	"	"	"	1/12	"	"	161	0,5427	0,887
III	14 x 14	"	79	0	"	"	164	1,0864	1,002
IIIa	"	"	"	1/12	"	"	166	0,7761	0,950
V	14 x 18	324	81	0	2,5	2870	269	1,0540	0,946
Va	"	"	80	"	"	"	"	1,0522	0,990
VI	10 x 20	321	113	"	1,6	2993	254	0,7316	1,110
VIa	"	"	111	"	"	"	"	0,7456	1,082
VII	18 x 18	"	62	"	1,9	2870	288	1,1132	0,674
VIIa	"	"	"	"	"	"	"	1,1453	0,786
VIII	"	311	60	"	"	"	294	1,1190	1,023
VIIIa	"	280	54	"	"	"	"	1,1163	1,166

TABLEAU B

ESSAIS DE O. BAUMANN 2ème série Poteaux de type A : section de 25 x 25 cm " " B : " " 12,5 x 25 cm " " C : " " 16 x 25 cm									
n°	type	ℓ	λ	e_o/h_t	ϖ	σ_e	σ'_j	$\frac{N_{cal}}{B\sigma'_j}$	$\frac{N_{exp}}{N_{cal}}$
1	A	297	41	0	1,3	2870	342	1,0852	0,943
2	B	323	89	"	0,6	2993	"	0,8076	0,823
3	C	651	141	"	0,8	"	"	0,5106	0,972
4	A	300	41,5	1/6	1,3	2870	328	0,6413	0,7455
5	B	321	89,5	"	0,6	2993	326	0,3659	0,940
6	C	651	141	"	0,8	"	328	0,1879	0,933
7	A	293	40,5	"	1,3	2870	208	0,6915	0,957
8	B	323	89	"	0,6	2993	"	0,3901	0,940
9	C	651	139	"	0,8	"	207	0,2070	1,210
10	A	293	40,5	1/3	1,3	2870	305	0,3940	0,923
11	B	323	89	"	0,6	2993	"	0,1519	1,360
12	C	651	139	"	0,8	"	303	0,0808	1,160
13	A	297	41	"	1,3	2870	335	0,3872	0,890
14	B	323	89	"	0,6	2993	"	0,1456	1,090
15	C	651	140	0	0,8	"	337	0,5153	0,810

tées par les divers auteurs. Nous signalons tout d'abord ces difficultés en décrivant brièvement la consistance des essais.

Les essais de O. Baumann (Réf. 2) comportent deux séries de poteaux à sections carrées ou rectangulaires de diverses dimensions. La résistance du béton a été mesurée par l'auteur par compression axiale de prismes de $12 \times 12 \times 36$ cm. Il semble que l'on puisse, comme nous l'avons fait, confondre les valeurs de cette résistance sur prismes et de la résistance mesurée sur cylindres $\varnothing$ 16 $\times$ 32 cm.

Les essais de F. G. Thomas (Réf. 3) comportent quatorze poteaux à section carrée, en deux séries de côté de section différent : 6 pouces et 3 pouces. La résistance du béton a été mesurée sur cubes de 6 pouces d'arête. Nous avons supposé que la résistance qui aurait été mesurée sur cylindres était égale aux huit dixièmes de la première.

Six poteaux à section carrée ont été essayés par R. Hanson et S. Rosenström (Réf. 4). La résistance mesurée sur prismes de $13 \times 13 \times 18$ cm nous a paru pouvoir être assimilée à celle qui aurait pu être mesurée sur cylindres.

Les essais de B. J. Rambøll (Réf. 5) ont porté sur 38 poteaux à section rectangulaire. La résistance du béton a été mesurée sur cubes de 20 cm d'arête. Nous avons pris les 83 % de cette résistance comme estimation de la résistance sur cylindres.

G. C. Ernst, J. J. Hromadik et A. R. Riveland (Réf. 6) ont mesuré sur cylindres, $\varnothing$ 6 $\times$ 12 pouces, la résistance de leurs 7 poteaux, résistance qui est ainsi directement utilisable.

Les 59 poteaux, deux à deux jumeaux sauf un, de W. Gehler et A. Hutter (Réf. 7) se divisent en trois séries. La première série, comprend 14 poteaux à section rectangulaire 14×16 cm aux angles abattus de $1{,}3 \times 1{,}5$ cm. La deuxième série comporte 9 poteaux à section octogonale. La dernière série comporte 36 poteaux de section rectangulaire. Dans cette dernière série l'excentricité de la charge était réalisée par application d'une force normale au poteau à mi-hauteur, dans un rapport constant avec la charge de bout. Pour la première et la seconde série la résistance du béton a été mesurée sur cubes de 20 cm d'arête et pour la troisième sur parallélépipèdes rectangles de $16 \times 16 \times 14$ cm. Nous avons admis que la résistance qui aurait été mesurée sur cylindres pouvait être prise égale aux huit dixièmes des résistances mesurées.

Les essais de K. Gaede (Réf. 8) ont porté sur huit poteaux à section rectangulaire. La résistance du béton a été mesurée sur cubes de 20 cm d'arête. Nous avons admis une valeur des huit dixièmes de cette résistance pour l'estimation de la résistance sur cylindres.

Enfin les essais de W. F. Chang et Ph. M. Ferguson (Réf. 9) ont porté sur 6 poteaux. La résistance du béton, directement utilisable, y a été mesurée sur cylindres.

Nous résumons les données et les résultats de ces divers essais aux tableaux A à K. Pour leur compréhension, nous définissons ci-dessous les symboles des grandeurs qui y figurent ainsi que les unités dans lesquelles ces dernières sont exprimées :

ℓ longueur de flambement exprimée en centimètres;

TABLEAU C

ESSAIS DE F.G. THOMAS

n°	ℓ	λ	e_o/h_t	ϖ	σ_e	σ'_j	$\frac{N_{cal}}{B\sigma'_j}$	$\frac{N_{exp}}{N_{cal}}$
			Poteaux de 15,24 x 15,24 cm de section					
LC1	225	51,1	0	2,18	3150	247	1,1778	0,886
LC2	316	72	0	"	2840	270	1,0259	0,864
LC3	362	82	0,005	"	3403	242	0,9127	0,950
LC4	408	93	"	"	3150	242	0,8446	1,000
LC8	225	51	0,027	"	3185	234	1,0235	0,870
LC7	316	72	0,037	"	2876	251	0,8456	0,957
LC6	362	82	0,042	"	3333	280	0,7245	0,971
LC5	408	93	0,047	"	3108	256	0,6625	1,180
LC12	225	51	0,027	"	2868	213	0,9908	0,911
LC11	316	72	0,037	"	2763	190	0,9254	1,044
LC10	362	82	0,042	"	2883	192	0,8442	1,013
LC9R	408	93	0,017	"	3143	204	0,8071	0,961
			Poteaux de 7,62 x 7,62 cm de section					
PLC1	253	115	0,056	4,91	3163	191	0,65	1,150
PLC2	"	"	"	"	"	197	0,6557	1,100

TABLEAU D

ESSAIS DE R. HANSON et S. ROSENSTRÖM
Poteaux de 13 cm x 18 cm de section

n°	Groupe	ℓ	λ	e_o/h_t	ϖ	σ_e	σ'_j	$\frac{N_{cal}}{B\sigma'_j}$	$\frac{N_{exp}}{N_{cal}}$
1	a	338	90	0	0,845	3900	315	0,7366	1,316
2	a	"	89	"	0,841	"	357	0,7254	1,157
3	a	"	87	"	0,817	"	425	0,7296	1,030
1	b	"	90	1/6	0,845	"	315	0,2985	1,394
2	b	"	89	"	0,841	"	357	0,2905	1,234
2	b	"	87	"	0,817	"	425	0,2922	1,200

TABLEAU E

ESSAIS DE B.J. RAMBØLL Poteaux de 14 cm x 18 cm de section

n°	ℓ	λ	e_o/h_t	ϖ	σ_e	σ'_j	$\frac{N_{cal}}{B\sigma'_j}$	$\frac{N_{exp}}{N_{cal}}$
1	128	31,0	0	1	3000	302	1,0797	1,024
2	"	31,5	"	"	"	269	1,0917	0,867
3	"	31,0	1/12	"	"	280	0,8281	1,161
4	"	31,5	"	"	"	224	0,8415	1,247
5	"	31,0	1/6	"	"	294	0,6426	1,064
6	"	31,0	"	"	"	266	0,6533	1,200
7	"	30,5	1/3	"	"	251	0,3986	1,321
8	"	31,0	"	"	"	268	0,3908	1,099
9	"	31,0	2/3	"	"	247	0,1259	1,499
10	"	31,0	"	"	"	259	0,1222	1,309
11	"	31,5	5/6	"	"	273	0,0824	1,393
12	"	31,5	"	"	"	228	0,0950	1,446
13	185	45,1	0	1	3000	301	1,0498	0,726
14	"	45,1	"	"	"	271	1,0605	0,946
15	"	43,6	"	"	"	261	1,0635	0,892
16	"	43,9	"	"	"	"	1,0603	0,891
17	"	45,1	1/12	"	"	266	0,7825	1,098
18	"	44,5	"	"	"	250	0,7910	1,056
19	"	45,1	1/6	"	"	256	0,6018	1,220
20	"	44,8	"	"	"	257	0,6013	1,291
21	"	44,2	1/3	"	"	244	0,3525	1,314
22	"	44,5	"	"	"	247	0,3441	1,401
23	"	44 5	2/3	"	"	248	0,1113	1,333
24	"	44,5	"	"	"	232	0,1199	1,324
25	"	44,5	5/6	"	"	298	0,0693	1,293
26	"	45,4	"	"	"	283	0,0732	1,286
27	290	71,2	0	1	3000	310	0,9195	0,805
28	"	68,8	"	"	"	303	0,9368	0,659
29	"	69,8	1/6	"	"	313	0,4483	0,925
30	"	70,2	1/3	"	"	287	0,2087	1,282
31	"	69,8	2/3	"	"	309	0,0796	1,142
32	"	70,7	5/6	"	"	312	0,0587	1,218
33	430	104,2	0	1	3000	291	0,6935	0,953
34	"	102,7	1/12	"	"	313	0,4417	1,151
35	"	103,4	1/6	1,76	"	281	0,3099	1,044
37	"	102,7	1/3	1	"	288	0,1358	1,160
36	"	104,2	2/3	"	"	285	0,0652	1,173
38	"	102,7	5/6	"	"	344	0,0442	1,123

λ élancement ou rapport de la longueur de flambement au rayon de giration de la section transversale du béton seul dans le plan de flambement;

$\frac{e_0}{h_t}$ excentricité initiale relative ou rapport de l'excentricité initiale à la hauteur totale de la section mesurée parallèlement au plan de flambement;

ϖ pourcentage d'acier (exprimé en %);

σ_e limite d'élasticité de l'acier des armatures longitudinales exprimée en kgf/cm²;

σ_j résistance à la compression du béton mesurée sur cylindres le jour de la rupture du poteau, exprimée en kgf/cm²;

B Aire de la section transversale du poteau, exprimée en centimètres carrés;

N_{cal} Charge critique calculée par la méthode de P. Faessel, exprimée en kilogrammes-force;

N_{exp} Charge ultime (de flambement) expérimentale, exprimée en kilogramme-force;

m Valeur moyenne du rapport $\frac{N_{exp}}{N_{cal}}$;

s Écart quadratique moyen relatif des valeurs de $\frac{N_{exp}}{N_{cal}}$, exprimé en %;

Les dimensions des sections sont exprimées en centimètres.

TABLEAU F

ESSAIS DE G.C. ERNST, J.J. HROMADIK et A.R. RIVELAND
Poteaux de 15,24 x 15,24 cm de section

n°	Groupe	ℓ	λ	e_o/h_t	ϖ	σ_e	σ'_j	$\frac{N_{cal}}{B\sigma'_j}$	$\frac{N_{exp}}{N_{cal}}$
3	I	229	52,0	0	1,228	3638	205	1,1664	0,897
4	I	381	86,5	0	"	"	"	0,8961	1,072
7	II	229	52,0	0,125	"	"	"	0,7444	1,0206
8	II	381	86,5	"	"	"	"	0,5144	1,199
11	III	229	52,0	0,25	"	"	"	0,5071	1,089
12	III	381	86,5	"	"	"	"	0,3181	1,157
15	IV	381	86,5	0,375	"	"	"	0,2402	0,950

TABLEAU G

ESSAIS DE W. GEHLER et A. HÜTTER
1ère série : poteaux de 14 x 16 cm de section

n°	ℓ	λ	e_o/h_t	ϖ	σ_e	σ'_j	$\frac{N_{cal}}{B\sigma'_j}$	$\frac{N_{exp}}{N_{cal}}$
I_a	560	139	0	0,91	2880	197	0,5853 0,5859	0,967 1,035
I_b	420	104	"	"	"	198	0,7901 0,7908	1,131 1,174
I_c	350	87	"	"	"	211	0,8949 0,8958	1,219 1,308
I_d	280	69	"	"	"	209	0,9927 0,9931	1,084 1,230
I_e	210	52	"	"	"	202	1,0774 1,0790	1,265 1,204
I_f	140	35	"	"	"	191	1,1359 1,1340	1,014 1,064
II_a	560	139	"	280	3440	198	0,6908 0,6901	1,093 1,173

TABLEAU H

ESSAIS DE W. GEHLER et A. HÜTTER
2ème série : poteaux de section octogonale de 30 cm de double apothème.

n°	ℓ	λ	e_o/h_t	ϖ	σ_e	σ'_j	$\frac{N_{cal}}{B\sigma'_j}$	$\frac{N_{exp}}{N_{cal}}$
III_a	750	97	0	1,84	2500	203	0,7576	1,046 1,091
III_b	625	81	"	"	"	187	0,8958	1,022 0,865
III_c	500	65	"	"	"	207	1,0003	1,023 0,916
III_d	375	49	"	"	"	191	1,1182	1,049 1,044
III_e	250	32	"	"	"	214	1,1352	inconnu 1,008

TABLEAU I

ESSAIS DE W. GEHLER et A. HÜTTER
3ème série : poteaux de 14 x 16 cm de section

n°	ℓ	λ	e_o/h_t	ϖ	σ_e	σ'_j	$\frac{N_{cal}}{B\sigma'_j}$	$\frac{N_{exp}}{N_{cal}}$
1	560	139	0	0,5	2400	255	0,5494	0,578 0,649
2	"	"	"	2	2950	265	0,6190	0,618 0,805
3	"	"	"	5	2800	245	0,7774	0,792 0,694
4	420	104	"	0,91	2100	160	0,8117	0,935 0,902
5	"	"	"	"	"	215	0,7859	0,853 0,896
6	"	"	"	"	"	267	0,7690	0,915 0,915
7	210	52	0,0375	2	2950	191	1,0649	1,077 1,021
8	280	70	0,050	"	"	243	0,8830	1,038 0,963
9	420	104	0,075	"	"	223	0,6135	1,087 1,011
10	560	139	0,100	"	"	221	0,3803	0,840 0,912
11	210	52	0,075	"	"	191	0,9547	1,099 1,194
12	280	70	0,100	"	"	243	0,7489	1,011 1,030
13	420	104	0,150	"	"	248	0,4287	1,029 1,048
14	560	139	0,200	"	"	213	0,2427	1,133 1,016
15	210	52	0,1125	"	"	191	0,8574	1,138 1,241
16	280	70	0,150	"	"	190	0,6767	0,952 1,108
17	420	104	0,225	"	"	220	0,3367	1,227 1,089
18	560	139	0,300	"	"	205	0,1991	1,188 1,139

Les 165 valeurs de N_{exp}/N_{cal} indiquées aux tableaux A à K sont celles d'une variable aléatoire. L'histogramme de cette variable est représenté à la figure 12 où sont indiquées sa moyenne 1,03 et son écart type relatif 0,17.

Considérons les 65 essais sous charge centrée seuls. L'histogramme de N_{exp}/N_{cal} pour ces essais est représenté à la figure 13, la moyenne de ce rapport est 0,97

TABLEAU J

ESSAIS DE K. GAEDE
Poteaux de 10 cm x 15,4 cm de section

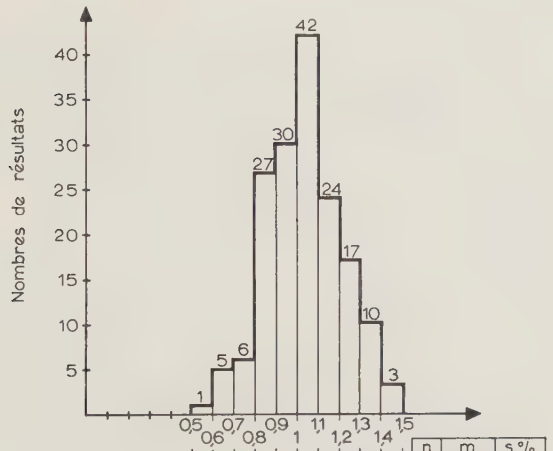
n°	série	ℓ	λ	e_o/h_t	ϖ	σ_e	σ'_j	$\frac{N_{cal}}{B\sigma'_j}$	$\frac{N_{exp}}{N_{cal}}$
1	I	294	102	0,2	1,0	3415	202	0,3065	0,809
5	"	"	"	"	"	2492	262	0,2794	0,878
4	II	"	"	0,5	"	2788	246	0,1210	0,805
5	"	"	"	"	"	2776	258	0,1160	0,837
1	III	354	123	"	"	3320	268	0,0975	0,845
2	"	"	"	"	"	3320	234	0,1075	0,879
3	"	"	"	"	"	3330	232	0,1084	0,883
4	"	"	"	"	"	3202	317	0,0845	0,922

TABLEAU K

ESSAIS DE W.F. CHANG et Ph. M. FERGUSON
Poteaux de 10,32 cm x 15,56 cm de section

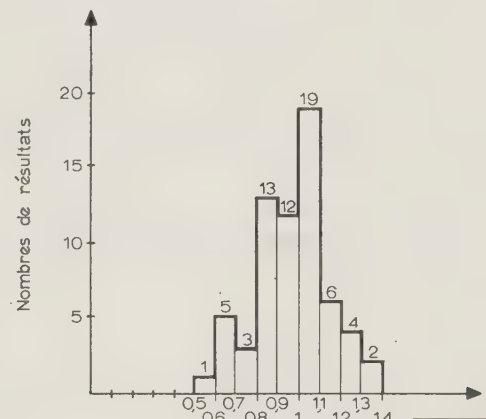
n°	ℓ	λ	e_o/h_t	ϖ	σ_e	σ'_j	$\frac{N_{cal}}{B\sigma'_j}$	$\frac{N_{exp}}{N_{cal}}$
1	320	107	0,073	1,77	3410	238	0,5282	0,850
2	"	"	0,389	"	"	356	0,1569	0,788
3	"	"	0,061	"	"	295	0,5351	0,764
4	"	"	0,382	"	"	307	0,1754	0,857
5	"	"	0,208	"	"	334	0,2552	0,915
6	"	"	0,064	"	4043	342	0,5114	0,861

et son écart type relatif de 0,17. L'histogramme du même rapport pour les essais sous charge excentrée est représenté à la figure 14. La moyenne est de 1,07 et l'écart type relatif de 0,15. Il est naturel que la moyenne soit plus basse et la dispersion plus grande pour les essais sous charge centrée. Les erreurs de centrage à l'essai sont en effet inévitables et les charges ultimes y sont très sensibles.



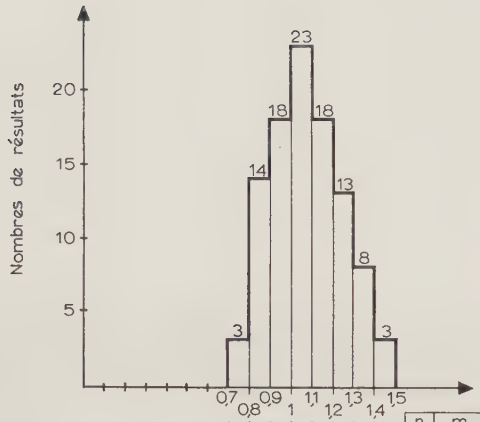
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	n	m	s %
Baumann			1	2	4	10	5	3	1	1		27	0,977	15,06
Thomas						3	5	3	3			14	0,990	9,73
Hanson & Rosenström								1	1	2	2	6	1,222	9,40
Rambøll			1	1	4	3	6	6	8	6	3	38	1,140	17,44
Gehler & Hütter	1	3	1	5	9	24	9	6	1			59	1,020	15,30
Ernst, Hromadik & Riveland					1	1	3	2				7	1,055	9,46
Gaede					7	1						8	0,858	4,40
Chang & Ferguson				2	3	1						6	0,839	5,94
Ensemble	1	5	6	27	30	42	24	17	10	3		165	1,032	16,82

FIG. 12. — Histogramme des rapports $\frac{N_{exp}}{N_{cal}}$ pour les 165 essais de flambement (λ variant de 30 à 141).



	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	n	m	s %
Baumann			1	1	2	4	4	2			14	0,957	14,02
Thomas					2						2	0,875	—
Hanson & Rosenström							1	1		1	3	1,168	—
Rambøll			1	1	4	2	1				9	0,863	12,60
Gehler & Hütter	1	3	1	4	6	12	3	4	1		35	0,988	18,16
Ernst, Hromadik & Riveland					1		1				2	0,984	—
Ensemble	1	5	3	13	12	19	6	4	2		65	0,969	17,15

FIG. 13. — Histogramme des rapports $\frac{N_{exp}}{N_{cal}}$ pour les 65 essais de flambement sous charge centrée.



									n	m	s %
Baumann	1	2	6	1	1	1	1		13	0,999	15,71
Thomas		1	5	3	3				12	1,009	8,99
Hanson & Rosenström						2	1		3	1,276	—
Rambøll			1	5	6	8	6	3	29	1,227	10,56
Gehler & Hütter		1	3	12	6	2			24	1,066	8,97
Ernst, Hromadik & Riveland			1	2	2				5	1,083	8,39
Gaede		7	1						8	0,858	4,40
Chang & Ferguson	2	3	1						6	0,839	5,94
Ensemble	3	14	18	23	18	13	8	3	100	1,074	15,42

FIG. 14. — **Histogramme des rapports $\frac{N_{exp}}{N_{cal}}$ pour les 100 essais de flambement sous charge excentrée.**

Pour apprécier la valeur des résultats précédents nous pouvons les comparer à ceux de B. Broms et I. M. Viest (Réf. 10) dont la méthode de calcul est considérée à ce jour comme la meilleure. Pour l'évaluation des charges de flambement sous charge centrée ces auteurs ont recours au procédé du module tangent d'Engesser. Ils utilisent pour calculer le flambement sous charge excentrée l'hypothèse de la déformée sinusoïdale sous une forme plus générale que P. Faessel mais emploient une méthode de calcul malheureusement très laborieuse. Leurs comparaisons avec les résultats expérimentaux portent sur 127 essais au total, dont 48 sous charge centrée et 79 sous charge excentrée. La comparaison avec les résultats de la méthode de P. Faessel ressort du tableau suivant :

	B. BROMS et I.M. VIEST		P. FAESSEL	
	m	s	m	s
Charges centrées	1,02	0,18	0,97	0,17
Charges excentrées	1,09	0,13	1,07	0,15
Tous essais groupés	1,07	0,16	1,03	0,17

Il semble bien que les résultats des deux méthodes soient équivalents.

Le calcul suivant P. FAESSEL, d'autre part, comporte-t-il des risques d'introduction d'erreurs systématiques par l'influence aberrante de tel ou tel paramètre? Pour le voir nous pouvons porter en ordonnées de graphiques cartésiens le rapport N_{exp}/N_{cal} et en abscisses les paramètres dont l'influence est importante sur les valeurs expérimentales des charges de flambement, soit :

la résistance à la compression du béton σ'_j;
la limite d'élasticité de l'acier σ_e;
l'élancement géométrique du poteau c'est-à-dire le rapport l/h_t;
le pourcentage géométrique ϖ des aciers longitudinaux;
la position de ces aciers définie par le rapport h/h_t de la hauteur utile de la section en flexion à sa hauteur totale;
et enfin l'excentricité initiale relative e_0/h_t.

On trouvera les graphiques correspondants pour les 65 essais sous charge centrée à la figure 15 et pour les 100 essais sous charge excentrée à la figure 16.

Des graphiques relatifs aux charges centrées ne se dégage aucune influence nette de l'un quelconque des paramètres étudiés. Si dans les graphiques relatifs aux charges excentrées on laisse de côté l'influence de l'élancement sur les poteaux courts de B. J. Rambøll, on ne remarque qu'une tendance à allure systématique, d'ailleurs faible, c'est celle de l'excentricité initiale relative e_0/h_t. Le rapport N_{exp}/N_{cal} paraît en effet une fonction croissante de ce paramètre. Ce fait nous semble essentiellement dû à ce que la méthode de P. Faessel néglige la résistance à la traction du béton tendu, approximation qui explique aussi que la valeur moyenne du rapport N_{exp}/N_{cal} soit supérieure à l'unité.

Les données recueillies dans le calcul nous permettent de distinguer parmi les 165 poteaux essayés, les 89 pour

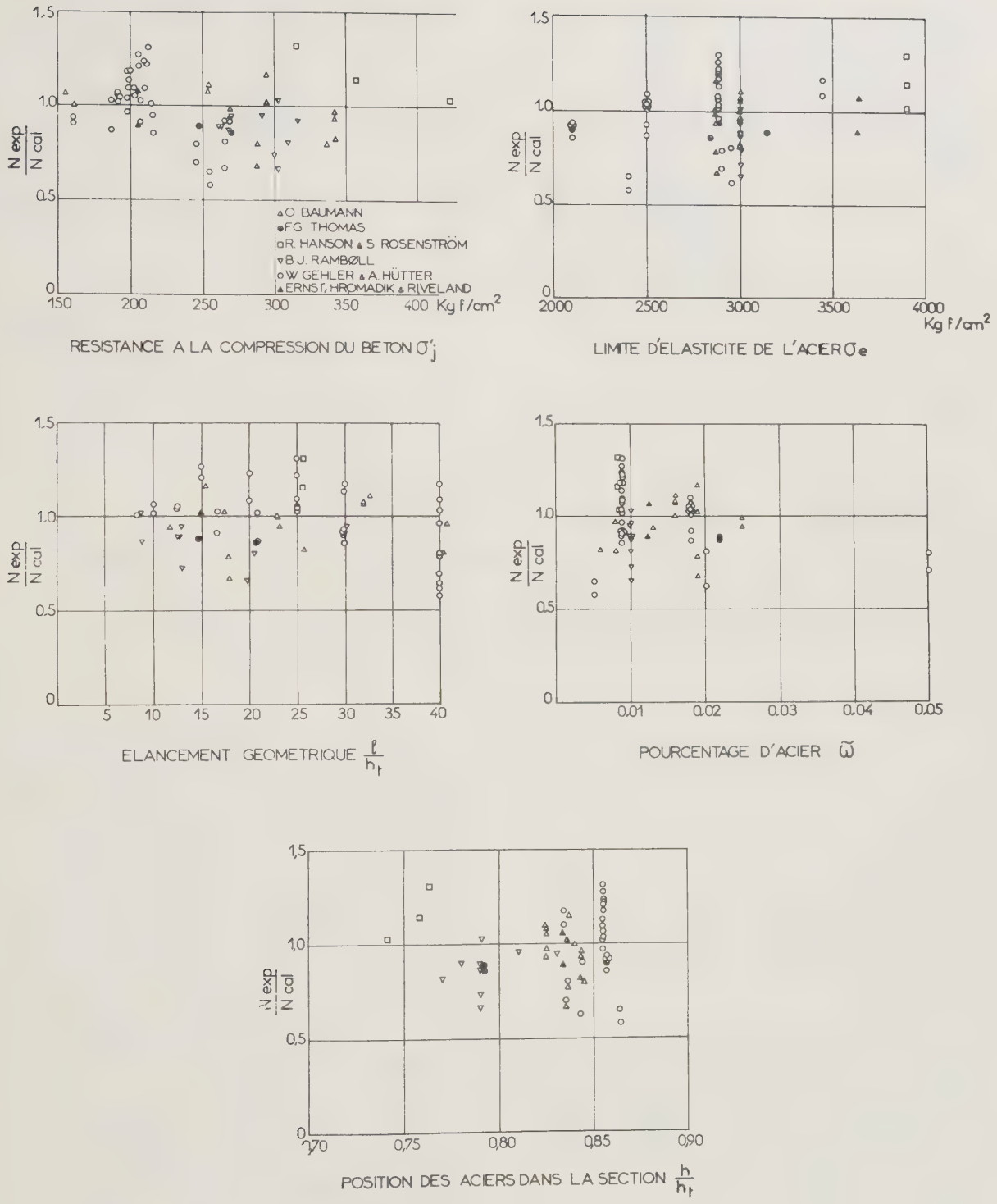


FIG. 15. — **Influences des divers paramètres dans les 65 essais sous charge centrée.**

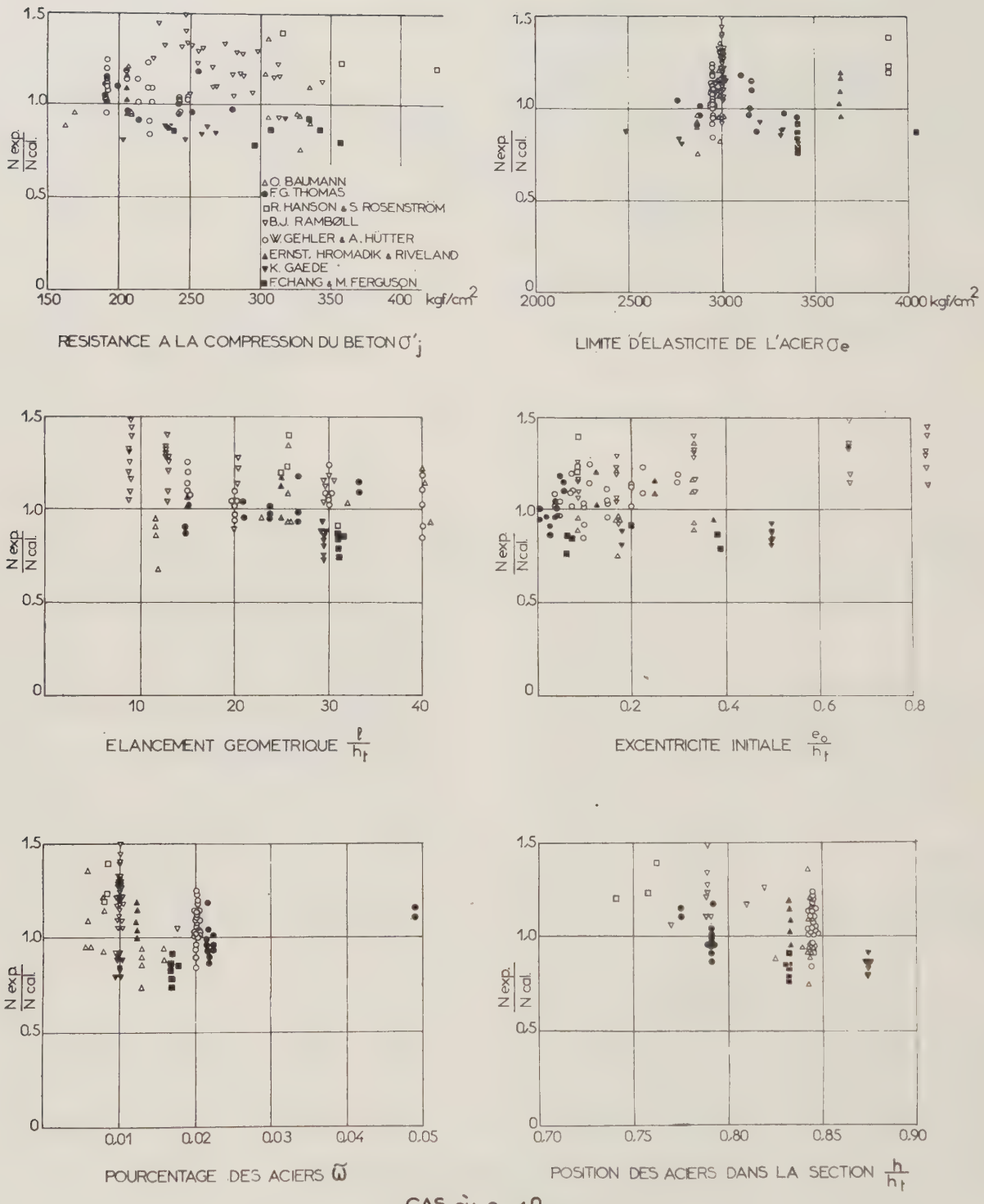


FIG. 16. — **Influences des divers paramètres dans les 100 essais sous charges excentrées.**

lesquels, à l'équilibre ultime, l'axe neutre tombe dans la section médiane. Nous avons calculé pour ces 89 poteaux, à partir de l'ordonnée de l'axe neutre et de la valeur de ε', la déformation relative ε de la fibre extrême tendue de la section médiane. La figure 17 indique en coordonnées cartésiennes la correspondance entre les valeurs de ε portées en abscisses et celles de N_{exp}/N_{cal} portées en ordonnées. Sur ce graphique on remarque deux domaines : tout d'abord celui où ε dépasse 10^{-4}, valeur que l'on peut adopter comme seuil de fissuration du béton; dans ce domaine les valeurs de N_{exp}/N_{cal} sont croissantes avec ε; c'est le même phénomène qu'avec e_0/h_t parce que ces deux paramètres varient dans le même sens. D'autre part dans le domaine de la figure 17 où ε est inférieur à 10^{-4} et où le béton tendu n'est pas fissuré, aucune tendance n'est visible sauf que le rapport N_{exp}/N_{cal} dépasse l'unité de 7 à 8 %. Tel semble l'ordre de grandeur de l'influence, dans le sens de la sécurité, de l'hypothèse simplificatrice de la non-résistance du béton tendu.

En résumé, la méthode de P. Faessel conduit à une évaluation des charges de flambement sous chargement de courte durée presque exacte en moyenne, affectée d'une dispersion aussi réduite qu'il semble aujourd'hui possible de l'obtenir et exempte de toute cause d'erreur systématique.

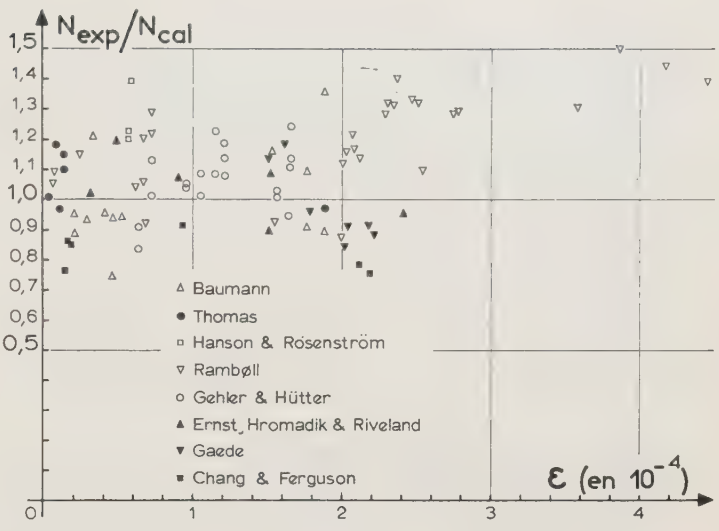


Fig. 17.

FLAMBEMENT SOUS CHARGES DE LONGUE DURÉE D'APPLICATION

CONFRONTATION DE LA MÉTHODE DE P. FAESSEL AUX RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Sous charge soutenue, c'est-à-dire maintenue longtemps constante, les flèches d'un poteau augmentent avec le temps du fait du fluage du béton. Elles peuvent être même affectées par le retrait : si le poteau est fissuré, le retrait n'agit que sur la zone comprimée, augmentant ainsi la courbure et la flèche; si un poteau présente une section dépourvue de centre de symétrie dans laquelle les centres de gravité des aires du béton et de l'acier ne sont pas confondues et si le béton n'est pas fissuré, le retrait engendre une courbure et donc une flèche qui peut aussi bien s'ajouter à la flèche de déformation mécanique affectée par le fluage que s'en retrancher.

Dans la représentation de P. Faessel les effets du fluage et du retrait peuvent s'interpréter comme une déformation dans le temps de la surface mécanique du poteau considéré. Négligeons le retrait devant le fluage, généralement prépondérant. La déformation de cette surface consiste dans une rotation d'ensemble des lignes de niveau N dans le sens Oe, O1/r, accompagnée d'une déformation particulière de chacune de ces lignes. La surface mécanique tend lentement vers une configuration stable. La droite D, représentative des conditions géométriques du chargement demeure fixe dans le temps. Il se peut que la courbe de niveau relative à la charge soutenue N qui coupe la droite D au point d'équilibre E_0 au temps t_0 de l'application de cette charge, continue à la couper en un point E_∞ dans sa position finale au bout d'un temps très long t_∞ (fig. 18). Dans ce cas le poteau résistera à la charge soutenue. Il se peut aussi que ladite courbe de niveau cesse au temps t_c de couper la droite D, et qu'elle le fasse au moment où elle lui est tangente en E_c (fig. 19). Le point E figuratif de l'équilibre au temps $t \leqslant t_c$ se meut en ce cas sur la droite D, lorsque t est voisin de t_c, avec une vitesse très grande par rapport à la vitesse de déplacement de la courbe N normalement à elle-même. On retrouve là une explication de l'accélération constatée des phénomènes peu avant que survienne le flambement sous charge soutenue.

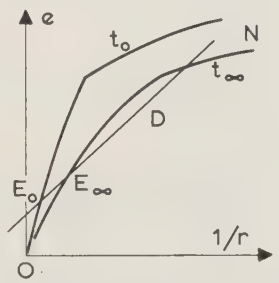


Fig. 18.

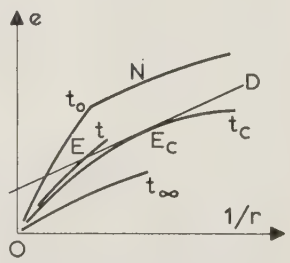


Fig. 19.

La méthode de P. Faessel devrait permettre l'évaluation des charges critiques sous charges soutenues par un choix convenable d'un diagramme déformations-contraintes du béton qui tienne compte du fluage. A titre d'approximation, il semble que ce diagramme puisse être représenté par la loi (17) dans l'expression de laquelle on attribuerait à ε'_u une valeur beaucoup plus grande que dans les essais de courte durée et peut être à σ'_f une valeur un peu plus petite. Pour examiner cette possibilité, référons-nous aux essais de K. Gaede (Réf. 8). Cet

TABLEAU L

N°	$\frac{e_0}{h_t}$	σ_e	σ'_j	t	N_{exp}	N_{exp}/N_{cal} pour ε'_u =				
						0,002	0,004	0,006	0,008	0,01
I/2	0,2	3415	267	17	6300	0,552	0,735	- 0,844	0,944	1,036
I/3	"	3485	234	7	6300	0,602	0,780	0,890	0,920	1,008
I/4	"	2814	259	101	6400	0,455	0,642	0,761	0,868	0,961
I/6	"	2978	378	38	8200	0,560	0,801	0,950	1,072	1,187
I/7	"	2916	340	14	8200		0,848	0,999	1,135	1,254

TABLEAU M

N°	Valeurs de ε'_c en millièmes pour ε'_u =				
	0,002	0,004	0,006	0,008	0,01
I/2	1,04	1,81	2,18	2,14	2,13
I/3	1,13	2,00	2,16	2,19	2,09
I/4	0,93	1,39	1,77	1,88	2,21
I/6	0,93	1,37	1,82	1,85	2,10
I/7	-	1,47	1,79	1,90	2,31

auteur a essayé sous charge soutenue huit poteaux de même section rectangulaire de 10 × 15,4 cm que ceux qu'il a essayés sous charge statique et dont nous avons fait état plus haut. Tous ces poteaux de 294 cm entre articulations avaient le même élancement λ, égal à 102. Cinq d'entre eux ont effectivement flambé sous charge soutenue : ceux de la série 1 pour lesquels l'excentricité initiale de la charge était de 2 cm. Nous avons recherché si un accord satisfaisant pouvait être atteint entre l'essai et la méthode de calcul par la variation de ε'_u, sans qu'il en soit touché à σ'_j. Les résultats des calculs correspondants figurent avec quelques données au tableau L. A l'en tête de ce tableau, le symbole t, non précédemment défini, indique le délai en jours qui s'est écoulé entre le chargement et la rupture. La charge ultime expérimentale indiquée N_{exp} a été estimée en fonction des conditions d'essai; elle est affectée de quelque incertitude, la charge effectivement appliquée décroissant lentement avec le temps et ayant été parfois réajustée en cours d'essai. Les valeurs de σ_e et σ'_j indiquées ont été effectivement introduites dans le calcul, σ'_j étant la résistance le jour de la rupture du poteau.

Les valeurs de N_{exp}/N_{cal} obtenues pour chaque valeur de ε'_u sont d'une homogénéité encourageante. Ce rapport a sensiblement la même valeur moyenne pour $\varepsilon'_u = 0{,}006$ que dans les essais de courte durée du même auteur. Cette valeur moyenne devient franchement supérieure à l'unité pour $\varepsilon_u = 0{,}01$.

L'arc de la loi (17) qui intervient dans le calcul s'étend de l'origine jusqu'à une valeur ε'_c éloignée de l'abscisse du sommet du diagramme comme le montre le tableau M. Il est donc justifié pour les poteaux de K. Gaede de n'avoir pas agi sur la valeur de σ'_j, car la diminution de σ'_j et l'augmentation de ε'_u ont des effets pratiquement équivalents sur le diagramme dans la zone de l'origine, là où il est près de sa tangente dont le coefficient angulaire est

$$2\ \sigma'_j / \varepsilon'_u.$$

En somme l'emploi de la méthode de P. Faessel avec une valeur de ε'_u de l'ordre de 8 à 10/1 000 permet la prévision correcte des charges soutenues ultimes des poteaux d'un élancement de l'ordre de 100 et faiblement armés (1 %). On ne peut affirmer que cette valeur de ε'_u convienne pour des poteaux dont l'élancement et le pourcentage d'armatures seraient différents. Si d'autres essais étaient connus qui puissent guider à cet égard, la méthode en cause fournirait semble-t-il un procédé convenable d'approximation.

ESSAIS DE COURTE DURÉE SUR POTEAUX A SECTION EN U

Tous les essais décrits dans la littérature, dont nous avons utilisé ci-dessus les résultats, ont porté sur des poteaux dont la section présentait un centre de symétrie. Ainsi, non seulement le plan moyen, mais aussi le plan normal à ce dernier et passant par l'axe était plan de symétrie de chacun d'eux. Nous avons voulu confronter la méthode de P. Faessel à l'expérience dans le cas de poteaux à plan moyen ne présentant pas cette double symétrie. Nous avons pour ces poteaux choisi une section en U, qui est équivalente à une section en Té mais qui évite que le flambement étudié dans le plan moyen ne se complique de flambement de torsion.

Caractéristiques des corps d'épreuve.

Les sept poteaux destinés à être soumis à l'essai, ou corps d'épreuve, mesuraient 5,00 m de longueur. Géométriquement identiques, ils présentaient les formes définies à la figure 20. Ils comportaient tous la même armature de section constante représentée à la figure 21. Ils ont été bétonnés à plat, et dès la prise du béton soumis à une cure d'une quinzaine de jours sous une cloche à brouillard, en même temps que les éprouvettes de contrôle de leur béton. Après leur cure, ils ont été conservés en même temps que leurs éprouvettes dans le local de bétonnage à l'humidité relative moyenne de 80-85 %. Ils ont été essayés à l'âge de quatre semaines environ.

La composition pondérale du béton était la suivante pour un mètre cube en place :

Ciment CPAL 325 —.....	350 kg
Gravier 6,3/16 mm du bassin de la Seine ..	1 155 kg
Sable 0/5 mm du bassin de la Seine	645 kg

La quantité d'eau correspondante, 190 litres environ, était réglée en vue de l'obtention d'un affaissement au cône de 3 cm.

Les éprouvettes de contrôle ont été essayées le même jour que le poteau correspondant.

Pour chaque poteau cinq cylindres ⌀ 15,95 × 31,9 cm ont été soumis à la compression axiale avec relevé du

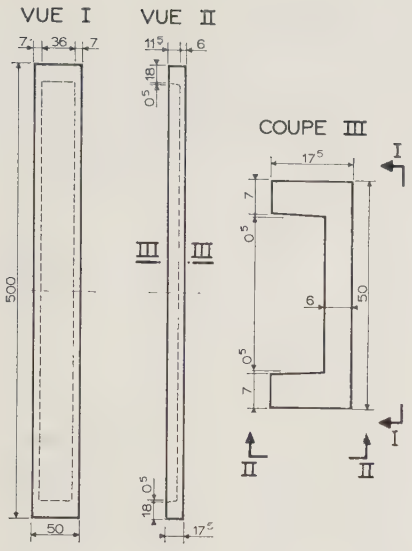


FIG. 20.

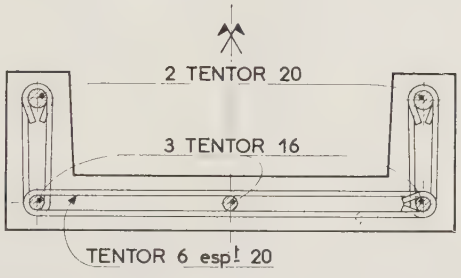


FIG. 21.

Coupe transversale de ferraillage des corps d'épreuve.

diagramme des déformations; trois d'entre eux sous charge continuellement croissante, deux avec chargements et déchargements successifs selon le programme même suivi pour l'essai du poteau. Trois éprouvettes prismatiques de 7 × 7 × 35 cm ont été rompues par flexion. Enfin une éprouvette prismatique de 7 × 7 × 28 cm a permis de mesurer le retrait.

Les renseignements relatifs aux bétons des sept poteaux essayés sont groupés au tableau N à l'en-tête duquel les symboles ont les significations suivantes :

- t_c durée de cure exprimée en jours;
- j âge lors de l'essai, en jours;
- σ'_j résistance à la compression, en kgf/cm²;
- σ_j résistance à la traction flexion, en kgf/cm² calculée par la formule 3,6 M/a^3 où M est le moment de rupture et a le côté de l'éprouvette;
- ε'_r raccourcissement de retrait, en millionièmes;
- ε'_{ui} raccourcissement du béton sous contrainte de rupture, en millionièmes, mesuré dans les essais sous charge croissante;
- ε'_{uj} raccourcissement du béton sous contrainte de rupture, en millionièmes, mesuré dans les essais comportant chargement et déchargement successifs.

De chaque barre utilisée pour la constitution des armatures longitudinales a été tirée une éprouvette qui a été soumise à l'essai de traction. D'autre part chaque couple d'armatures symétriques par rapport au plan moyen a été constitué de deux tronçons d'une même barre. Les limites d'élasticité σ_e à 0,2 % d'allongement permanent des diverses armatures des différents poteaux sont indiquées au tableau O.

TABLEAU N

N°	t_c	j	σ'_j	σ_j	ε'_r	ε'_{ui}	ε'_{uj}
CC 1	12	32	380	26,3	-	-	-
CC 2	13	28	294	28,2	120	2000	2135
CC 3	13	28	359	28,7	102	2100	2300
CC 4	14	27	370	28,8	240	2100	2200
CC 5	14	27	346	23,3	195	1850	2250
CC 6	17	27	359	29,2	78	2150	2470
CC 7	18	27	330	24,7	142	2050	2250

TABLEAU O

N_o	Valeurs de σ_e (kgf/cm²) Repères a	b
CC 1	5330 *	4910
CC 2	5440 *	4740
CC 3	5000	5220 *
CC 4	4870 *	5080
CC 5	4980	5180 *
CC 6	4900 *	4740
CC 7	5160	4820 *

Conduite des essais.

Les poteaux ont été essayés sur la machine de 1 000 t du Centre d'Essai des Structures à Saint-Rémy-lès-Chevreuse (fig. 22) entre « têtes de flambement ». Chacune de ces têtes comporte deux articulations perpendiculaires à roulement de cylindre sur plan fonctionnant en charge. Les axes des cylindres sont dans le plan de la face vue du plateau d'appui. Du fait de cette disposition le point de passage de la charge appliquée passe constamment par le centre du plateau d'appui et donc l'excentricité de cette charge par rapport à la section du poteau appuyée sur le plateau ne varie pas; d'autre part la longueur de flambement du poteau soumis à l'essai est égale à la distance entre plateaux, c'est-à-dire à la longueur du poteau, soit ici 5,00 m. Il en résulte que l'élancement λ des poteaux essayés, tel qu'il a été défini plus haut, était de 106.

Nous avons essayé trois poteaux sous charge centrée et quatre poteaux sous charges affectées d'excentricités deux à deux opposées et respectivement égales à 1/10 et 2/10 de la hauteur de la section transversale. Les essais sous charges excentrées ont été affectés par l'insuffisance du jeu angulaire des têtes de flambement (dont c'était le premier emploi et qui sont maintenant en cours de modification). Aussi exposons-nous tout d'abord les essais de poteaux sous charges centrées.

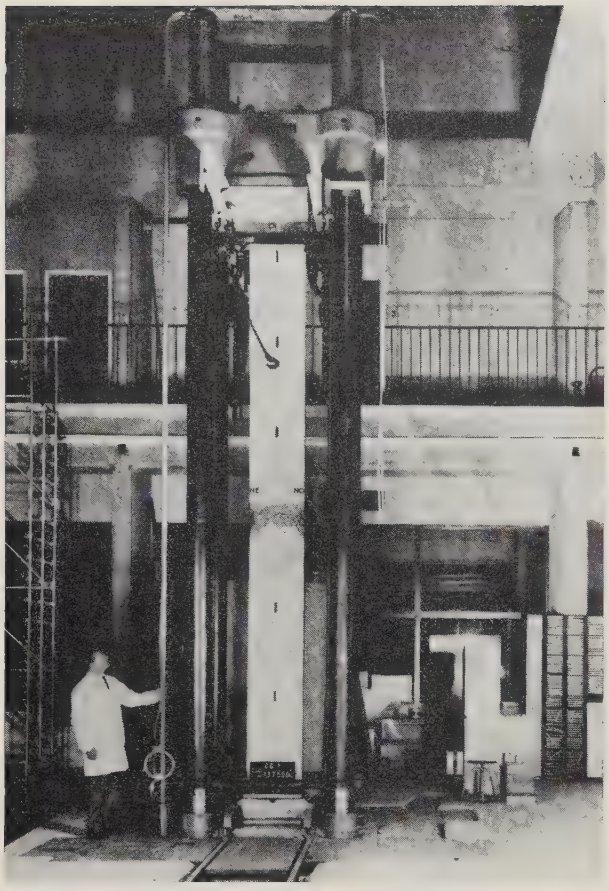


FIG. 22. — **Le poteau CC1 après l'essai.**

Poteaux essayés sous charges centrées.

Il y a une difficulté à déterminer le centre de gravité d'une section de béton armé dépourvue de centre de symétrie. Nous avons calculé sa position par la théorie élastique classique en adoptant la valeur $n = 15$ du coefficient d'équivalence. Les poteaux ont été calés sur les têtes de flambement de manière que leur axe, lieu des centres de gravité des sections courantes, soit centré à 0,25 mm près. Les charges ont été appliquées par paliers de valeurs croissantes avec déchargement jusqu'à une valeur de 5 tonnes après chaque palier.

Le poteau CC 1 a flambé du côté des nervures, c'est-à-dire que la fibre la plus comprimée de sa section médiane se trouvait du côté du hourdis. La charge ultime N_{exp} a été de 137,5 t : la flèche maximale au moment de la rupture était d'environ 13 mm. La rupture, survenue par écrasement du hourdis, a été brutale. Il n'est apparu de fissures sur les nervures qu'à la rupture même. Le relevé des flèches observées figure au tableau P.

Le poteau CC 6, comme le précédent, a flambé du côté des nervures. La charge ultime N_{exp} a été de 160 t. La flèche maximale sous charge ultime a été de 5,8 mm. Les extensomètres à résistance collés sur le béton dans la section médiane ont montré que cette dernière était

TABLEAU P

Poteau CC 1					
Charge (t)	Flèches en mm/10 aux abscisses relatives x/ℓ : 1/6	1/3	1/2	2/3	5/6
15	2	1	1	2	1
30	2	1	1	2	2
45	1	0	1	2	2
60	1	0	1	2	3
75	1	0	1	3	3
90	0	0	1	3	3
100	1	0	2	4	4
110	1	2	4	7	6
120	3	6	10	13	10
130	16	27	37	38	25
132,5	31	54	70	65	40
135	62	108	129	126	72

TABLEAU Q

Poteau CC 6					
Charge (t)	Flèches en mm/10 aux abscisses relatives x/ℓ : 1/6	1/3	1/2	2/3	5/6
15	2	2	0	0	0
30	1	2	2	1	0
45	1	2	2	1	0
60	1	2	1	0	- 1
75	9	16	18	17	9
90	10	17	20	18	10
100	10	18	22	20	11
110	11	20	24	24	11
120	12	21	25	23	12
125	12	22	27	24	13
130	13	23	28	25	13
135	12	24	32	30	17
140	12	23	30	27	12
145	13	27	36	35	19
150	19	37	49	46	26
155	24	45	58	53	30

TABLEAU R

Charge (t)	Poteau CC 7 — Flèches en mm/10 aux abscisses relatives x/ℓ : 1/6	1/3	1/2	2/3	5/6
15	1	1	2	2	1
30	3	5	6	5	3
45	6	9	10	9	5
60	9	15	17	14	9
70	12	20	22	20	12
80	17	26	30	27	16
85	20	32	36	31	19
90	23	37	63	37	22
95	28	45	52	46	27
100	33	55	64	56	33
105	41	69	81	70	41
110	54	92	108	104	55
112,5	62	103	134	118	69
115	70	156	184	161	94

entièrement comprimée sous la charge ultime, le raccourcissement du béton atteignant environ 1,3 ‰ sur la face extérieure du hourdis. L'écrasement du hourdis et la fissuration des nervures ne sont survenues qu'après divergence de l'équilibre, et sous une charge qui n'a pu être mesurée, la machine, non encore équipée de son contrôle de déformation, fonctionnant sous contrôle de charge. Le relevé des flèches observées figure au tableau Q.

Le poteau CC 7, à l'inverse des précédents, a flambé du côté du hourdis, c'est-à-dire que les nervures se sont trouvées les parties les plus comprimées de sa section. La charge ultime a été de 117,5 t; la flèche maximale sous charge ultime n'a pu être mesurée. Les mesures extensométriques ont montré que la section médiane était entièrement comprimée sous la charge ultime, le raccourcissement maximal du béton y atteignant 1,96 ‰ sur la face extérieure des nervures. L'écrasement des nervures et la fissuration du hourdis ne sont survenues qu'après divergence de l'équilibre. Le relevé des flèches mesurées figure au tableau R.

Pour le calcul des charges de flambement des trois poteaux CC 1, 6 et 7, les limites d'élasticité adoptées pour l'acier ont été celle des aciers du côté le moins comprimé, marquées d'un astérisque au tableau O. Pour le béton, on a eu recours à la loi (17). Les valeurs de ε'_u adoptées ont été les valeurs de ε'_{uj} qui figurent au tableau N, mesurées lors d'essais de compression avec chargements et déchargements successifs. La valeur de ε'_{max} a été prise égale à 1,2 ε'_u. Le calcul automatique a d'emblée donné un résultat plausible pour le poteau CC 7, mais des valeurs aberrantes, parce que manifestement trop hautes, pour les poteaux CC 1 et 6. Cela vaut la peine qu'on s'y arrête.

Parmi les données particulières à chaque cas qu'il convient de fournir à l'ordinateur, figurent le sens du flambement et l'ordonnée du point de passage de la force extérieure (par rapport au centre du rectangle circonscrit à la section). Ce point de passage qui devrait coïncider avec le centre de gravité mécanique de la section peut ne pas le faire. Le calcul confié à la machine est alors celui d'un poteau sous charge d'excentricité faible mais non nulle. Le sens de cette excentricité peut être compatible ou non avec le sens de flambement imposé à la machine, lequel est le sens observé à l'essai. Il l'était pour le poteau CC 7 c'est-à-dire que le point de passage en cause, ou centre de gravité calculé, se trouvait du côté des nervures par rapport au centre de gravité mécanique vrai. Pour les poteaux CC 1 et CC 6 l'erreur sur la position théorique du centre de gravité était sensiblement la même, mais le flambement s'est produit en sens contraire. Cette circonstance tient aux causes de dispersion inhérentes à tout essai, dont l'une, le retrait, agit cependant dans un sens connu : le retrait en effet tend à rendre concave la face hourdis des poteaux et introduit de ce fait une flèche initiale. Pour la machine, il y avait incompatibilité entre le sens de l'excentricité et le sens du flambement. Dans ce cas la machine fournit cependant une réponse par le mécanisme suivant. L'ordonnée e_0 de la droite D (équation 4) à une abscisse $1/r$ nulle est négative. Elle l'est encore au premier pas, choisi à dessein petit, d'abscisse $1/\rho$, de la série de valeurs de la courbure pour lesquelles la machine doit calculer les valeurs de la charge d'équilibre. Il lui est cependant possible de trouver une valeur de l'excentricité interne égale à l'excentricité externe et donc négative en se servant de la branche descendante du diagramme de déformation (eq. 17) du béton. Il existe ainsi, dans le quadrant des excentricités négatives des axes, un prolongement analytique de la surface mécanique d'équilibre du poteau, qui n'a pas de sens physique car les positions d'équilibre qui lui correspondent sont essentiellement instables (fig. 23). La machine

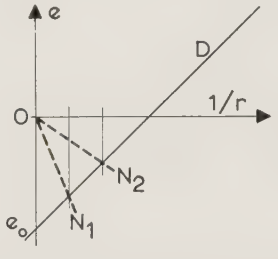


FIG. 23.

ayant trouvé la valeur N_1 de la charge pour $1/r = 1/\rho$ trouvera au pas suivant, $1/r = 2/\rho$, une valeur N_2 plus petite eu égard à la position relative des courbes N_1 et N_2; elle imprimera donc la valeur N_1 comme résultat du calcul. Ainsi donc dans une situation aberrante d'excentricité négative, la machine fournit la valeur trouvée au premier pas de calcul $1/r = 1/\rho$. Nous avons indiqué qu'il en était de même lorsque l'excentricité initiale était effectivement nulle et que le calcul était alors correct. Dans ces conditions, le procédé employé pour obtenir la charge de flambement sous charge centrée a été de demander à l'ordinateur le calcul de N pour une série de valeurs de l'ordonnée du point de passage de la force extérieure encadrant l'ordonnée du centre de gravité calculée et de lui faire fournir en même temps que la valeur de N la valeur de l'excentricité pour laquelle cette valeur avait été trouvée. Les valeurs fournies par l'ordinateur dans le cas des poteaux CC 1 et CC 6 figurent au tableau S. A l'en-tête de ce tableau e_{go} désigne l'excentricité initiale fournie à la machine par rapport au centre du rectangle

TABLEAU S

Poteau	e_{go}/h_t	e_g/h_t	$N_{cal}/B\sigma'_j$	k
CC 1	0,104	0,112	1,3143	1
	0,107	0,115	1,2955	1
	0,120	0,128	0,9782	1
	0,125	0,133	0,7870 *	1
	0,128	0,219	0,7628	11
CC 6	0,110	0,118	1,2105	1
	0,115	0,123	1,0586	1
	0,118	0,126	0,9475	1
	0,120	0,128	0,8621	1
	0,121	0,129	0,8239 *	1
	0,123	0,197	0,7603	9

circonscrit à la section; e_g désigne l'excentricité pour laquelle le calcul de N_{cal} a été effectué, par rapport à la même origine. Les excentricités sont données en valeur relative par rapport à la hauteur totale h_t de la section. Il est possible de reconnaître combien de pas de calcul $1/\rho$ ont été effectués par l'ordinateur pour passer de e_{go} à e_g. Il est bien évident que l'on a

$$e_g - e_{go} = e - e_o \tag{18}$$

et donc par l'équation (4)

$$\frac{e_g}{h_t} - \frac{e_{go}}{h_t} = \frac{1}{\pi^2}\frac{l^2}{h^2_t}\frac{kh_t}{\rho} \tag{19}$$

si k pas de calcul égaux à $1/\rho$ ont été nécessaires pour passer de e_0 à e. Or les valeurs numériques sont les suivantes :

$$\frac{l^2}{h_t^2} = \left(\frac{500}{17{,}5}\right)^2 = 816$$

$$\frac{h_t}{\rho} = 10^{-4}$$

L'équation (19) se transforme alors en

$$\frac{e_g}{h_t} - \frac{e_{go}}{h_t} = 0{,}00827\ k \tag{20}$$

La valeur de k afférente à chacune des valeurs fournies de e_{go} peut être ainsi immédiatement déterminée : elle figure à la dernière colonne du tableau S. On voit combien est net le passage des excentricités négatives aux excentricités positives. Les charges de flambement calculées pour les plus grandes valeurs de e_0/h_t pour lesquelles la machine s'arrête au premier pas (marquées d'un astérisque au tableau S) sont probablement erronées par excès. Les premières charges pour lesquelles k n'est plus égal à l'unité sont certainement erronées par défaut.

Contrôlons les approximations ainsi obtenues en évaluant les charges de flambement par le mode de calcul d'Engesser auquel la méthode de P. Faessel est équivalente pour les chargements centrés, comme nous l'avons signalé. Rappelons la formule

$$N_C = \frac{\pi^2 E_p I_p}{l^2} \tag{14}$$

Remarquons, nous inspirant de B. Broms et I. M. Viest (Réf. 10), que le terme $E_p I_p$ représente dans cette formule la rigidité de flexion du poteau. Il peut donc s'écrire

$$E_p I_p = E_t [I + Bg^2 + n_t (I_a + Ag_a^2)] = E_t I_t \tag{21}$$

expression où les symboles ont les significations suivantes :

B aire de la section droite du béton;
I moment d'inertie de la section du béton seul autour de son axe principal d'inertie normal au plan moyen;
A aire de la section droite des aciers;
I_a moment d'inertie de la section droite des aciers autour de son axe principal d'inertie normal au plan moyen;
E_t module tangent du béton;
n_t rapport E_a/E_t;
E_a module d'Young des aciers, soit $2{,}1.10^6$ kgf/cm²;
g et g_a distances des centres de gravité des sections droites respectivement du béton et des aciers au centre de gravité de l'ensemble de la section droite.

On a :

$$(B + n_t A)\ g = n_t A\ (g + g_a) \tag{22}$$

la quantité $g + g_a$ étant connue de par la configuration géométrique de la section droite du poteau.

E_t doit être déterminé à partir de la contrainte moyenne σ' du béton du poteau sous la charge critique :

$$\sigma' = \frac{N_c}{B + n_t A} \tag{23}$$

On peut adopter pour le faire la loi parabolique (16), le sommet de la parabole ne pouvant être ici atteint. On trouve aisément

$$E_t = \frac{d\sigma'}{d\varepsilon'} = 2\frac{\sigma'_j}{\varepsilon'_u}\sqrt{1 - \frac{\sigma'}{\sigma'_j}} = E_o\sqrt{1 - \frac{\sigma'}{\sigma'_j}} \tag{24}$$

La formule (14) se met enfin sous la forme :

$$\frac{\sigma'}{\sigma'_j} = \frac{\pi^2}{l^2}\frac{E_t I_t}{(B + n_t A)\ \sigma'_j} \tag{25}$$

Les quatre équations (21), (22), (24), et (25) se résolvent aisément par approximations successives. Une réserve est à faire sur leur validité : la valeur de ε' doit être inférieure à $\varepsilon'_e = \sigma_e/E_a$ déformation des aciers à leur seuil de plasticité. Dans ce dernier cas la valeur de E_t à prendre en compte est celle qui correspond à ε'_e.

Les constantes géométriques ont les valeurs suivantes :

$B = 466{,}75$ cm²
$I = 10.815$ cm⁴
$A = 12{,}315$ cm²
$I_a = 407$ cm⁴
$g + g_a = 2{,}765$ cm.

D'autre part nous prenons pour σ'_j et ε'_u les valeurs adoptées pour le calcul par la méthode de P. Faessel. Dans ces conditions nous trouvons les résultats portés au tableau T.

Le rapprochement des tableaux T et S montre que les erreurs commises en adoptant les valeurs marquées d'un astérisque au tableau S seraient effectivement par excès

TABLEAU T

Poteau	σ'_j (kgf/cm2)	ε'_u (10^{-3})	$\frac{\sigma'}{\sigma'_j}$	n_t	$\frac{N_c}{B\sigma'_j}$
CC 1	380	2	0,6305	9,09	0,782
CC 6	359	2,15	0,6089	10,06	0,770
CC 7	330	2,25	0,5968	11,27	0,774

TABLEAU U

Poteau	σ'_j (kgf/cm2)	$\frac{N_{cal}}{B\sigma'_j}$	$\frac{N_{exp}}{N_{cal}}$
CC 1	380	0,7870	0,987
CC 6	359	0,8239	1,162
CC 7	330	0,7103	1,077
		Moyenne :	1,075

et égales à 0,6 % pour le poteau CC 1 et 7 % pour le poteau CC 6. En adoptant les valeurs qui suivent les précédentes, les erreurs par défaut atteindraient 2,4 % pour le poteau CC 1 et 1,3 % pour le poteau CC 6. Toutes ces erreurs sont tolérables. Elles pourraient être réduites en adoptant des valeurs plus rapprochées de e_{go}/h_t, ce qui eut été possible sans dépense excessive de temps machine si la position du centre de gravité avait été estimée avec $n = 10$ (voir tableau T).

Pour le poteau CC 7, qui a flambé dans le sens compatible avec le calcul d'après P. Faessel, ce calcul a donné 0,7103 comme valeur de $N_{cal}/B\sigma'_j$. Le calcul d'après Engesser a donné 0,774. Cette différence s'explique aisément par le fait que l'excentricité initiale indiquée en fait à la machine n'était pas nulle.

En définitive, la comparaison des charges de flambement expérimentales et calculées par la méthode de P. Faessel est faite au tableau U. Nous y avons retenu comme charges calculées pour les poteaux CC 1 et 6 les charges marquées d'un astérisque au tableau S. L'accord avec l'expérience est satisfaisant.

Poteaux essayés sous charges excentrées.

Pour le poteau CC 2 la charge était excentrée côté hourdis du dixième de la hauteur totale (par rapport au centre de gravité de la section dont la position avait été calculée avec $n = 15$; rapportée au centre du rectangle circonscrit, l'excentricité relative était de 0,206).

A l'application de la charge de 75 t la flèche a été de 21,1 mm; puis, sous la même charge, cette flèche a augmenté pendant que les nervures se fissuraient progressivement. La flèche s'est stabilisée à 70 mm environ par suite du blocage de l'articulation supérieure, et il a été possible d'augmenter la charge ensuite jusqu'à 106 t. Mais on n'avait plus affaire à un poteau articulé aux deux extrémités comme le montrait le changement de pente du diagramme charge-flèche à 75 t. On doit considérer que le poteau articulé aux deux extrémités a flambé par divergence d'équilibre à 75 t.

La charge du poteau CC 3 était excentrée côté nervures du dixième de la hauteur totale (par rapport au centre du rectangle circonscrit l'excentricité relative était égale à 0,006 côté hourdis). Au palier de 70 t une divergence d'équilibre progressive s'est produite et la rupture physique a suivi, bien que les articulations supérieure et inférieure se soient bloquées successivement. La charge de 70 t est donc bien la charge de flambement à retenir.

Les articulations du poteau CC 4 étaient excentrées des deux dixièmes de la hauteur de la section côté hourdis (l'excentricité relative par rapport au centre du rectangle circonscrit était de 0,306). Les nervures ont commencé à se fissurer vers 40 t (flèche 14,7 mm). Puis il y a eu

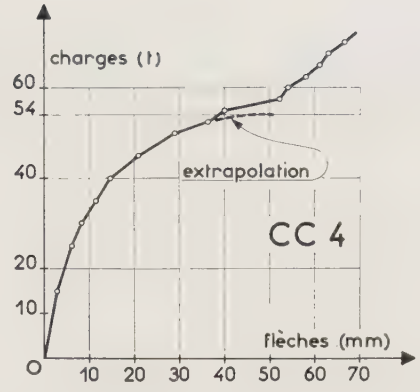


FIG. 24.

blocage des articulations, ce qui est apparent sur le diagramme flèche-charge (fig. 24). L'extrapolation de ce diagramme semble possible (même fig. 24). La charge de flambement du poteau articulé paraît pouvoir être ainsi évaluée à 54 t.

Pour le poteau CC 5 l'excentricité initiale était des deux dixièmes de la hauteur côté nervures (l'excentricité relative par rapport au centre du rectangle circonscrit était de 0,094 côté nervures). A l'application de la charge de 75 t on a pu mesurer une flèche de 36,7 mm, puis sous cette même charge s'est produite une divergence d'équilibre, la rupture physique survenant après blocage des articulations. Il est à noter que le poteau ne s'est fissuré (côté hourdis) qu'au moment même de sa rupture, et non au moment où l'équilibre a divergé.

La comparaison des résultats expérimentaux et du calcul figure au tableau V.

TABLEAU V

Poteau	e_o/h_t	$\frac{N_{cal}}{B\sigma'_j}$	N_{cal} (t)	N_{exp} (t)	$\frac{N_{exp}}{N_{cal}}$
CC 2	1/10	0,5384	73,9	75	1,015
CC 3	-1/10	0,4585	76,8	70	0,911
CC 4	2/10	0,3358	58,0	54	0,931
CC 5	-2/10	0,3299	53,3	75	1,407
			Moyenne :		1,066

Soulignons que le calcul ne peut être influencé par une erreur d'appréciation de la position du centre de gravité de la section d'un poteau, l'excentricité de la ligne d'action de la charge étant indiquée à la machine par rapport au centre du rectangle circonscrit à la section. La moyenne des valeurs de N_{exp}/N_{cal} n'est pas éloignée de l'unité, et l'étendue de leur distribution n'est pas supérieure à celle que l'on trouve dans les essais décrits dans la littérature (voir les histogrammes, fig. 12 et 14).

La valeur très élevée relative au poteau CC 5 semble tenir à ce que le hourdis de ce poteau n'était pas fissuré au moment de la divergence d'équilibre alors que le calcul

le suppose fissuré. Il y a là d'ailleurs une circonstance anormale, parce qu'au début du palier de chargement ultime de 75 t, les trois jauges collées sur la surface de ce hourdis dans la section médiane indiquaient les allongements relatifs de 520, 490 et 500 $\times$ 10^{-6}, dont la cohérence semble indiquer que le béton était intact, alors que leurs valeurs sont très élevées pour un béton en état d'intégrité.

En définitive le résultat de la comparaison paraît satisfaisant.

CONCLUSIONS

1. Quant aux chargements de courte durée :

1,1. Pour les poteaux à plan moyen dont la section présente un centre de symétrie :

la méthode de P. Faessel est justifiée en ses principes. Le programme de calcul automatique qui en dérive fournit les charges de flambement avec une approximation comparable à celle des meilleures méthodes aujourd'hui employées.

1,2. Pour les poteaux à plan moyen dont la section ne présente pas de centre de symétrie :

sous réserve de confirmation par des essais plus étendus, la méthode de P. Faessel est justifiée en ses principes et le programme dérivé permet le calcul avec une bonne approximation. Un aménagement du programme paraît souhaitable pour faciliter le calcul sous chargement centré.

2. Quant aux chargements de longue durée :

Il semble que le programme de calcul dérivé de la méthode de P. Faessel puisse fournir un procédé convenablement approché des charges de flambement lorsque des essais plus étendus fourniront une base plus large qu'aujourd'hui au choix empirique de la valeur des paramètres qui pourraient caractériser une loi déformation-contrainte approchée du béton.

RÉFÉRENCES

[1] P. Desayi et S. Krishnan. Equation for the stress-strain curve of concrete. *Jl of the American Concrete Institute*, Mars 1964.

[2] O. Baumann. Die Knickung der Eisenbeton-Säulen. Laboratoire Fédéral d'essai des Matériaux. *Rapport* n° 89. Zurich, 1934.

[3] F. G. Thomas. The strength of long reinforced concrete columns in short period tests to destruction. Department of Scientific and Industrial Research, *Building Research.* Technical paper n° 24. London, 1939.

[4] R. Hanson et S. Rosenström. Tryckförsök med slanka betongpelare. *Betong*, vol. 32, n° 3. Stockholm, pp. 247-262, 1947.

[5] B. J. Rambøll. Reinforced concrete columns. *Teknisk Forlag.* Copenhague, 1951.

[6] G. C. Ernst, J. J. Hromadik et A. R. Riveland. Inelastic Buckling of plain and reinforced concrete columns, plates and shells. University of Nebraska Engineering Experiment Station. Bulletin n° 3, Lincoln, 1953.

[7] W. Gehler et A. Hütter. Knickversuche mit Stahlbeton-Säulen. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, n° 113. Ed. W. Ernst & Sohn, Berlin, 1954.

[8] K. Gaede. Knicken von Stahlbetonstaben unter Kurz und Longzeitbelastung. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, n° 129. Ed. W. Ernst & Sohn, Berlin, 1958.

[9] W. F. Chang et Ph. M. Fergusson. Long Hinged Reinforced Concrete columns. *Journal of the American Concrete Institute.* Janvier 1963.

[10] B. Broms et I. M. Viest. Ultimate Strength analysis of long hinghed reinforced concrete columns. *Journal of the Structural division.* Proceedings of the American Society of Civil Engineers. Janv. 1958. Paper 1510.

REMERCIEMENTS

Les recherches nécessaires à l'élaboration de cette thèse n'ont été possibles que grâce aux conseils, aux réflexions et à l'aide obtenus par l'auteur de la part de ses professeurs, des responsables du Centre d'Essais des Structures et de ses collègues.

Notre gratitude va en premier lieu à Monsieur le Professeur R. Siestrunk, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, à qui nous devons d'avoir accepté de prendre la direction de notre thèse et à Monsieur le Professeur J. R. Robinson, Ingénieur général des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Directeur de l'I.R.A.B.A. qui dirigea nos recherches et nous accorda toute sa sollicitude pour que la tâche de notre recherche puisse s'accomplir.

Nous exprimons notre gratitude à Monsieur G. Dreux, Directeur Adjoint du C.E.S. qui a mis si aimablement à notre disposition tout ce qui était nécessaire pour que nous puissions mener à bien nos travaux d'essais. Avec lui notre reconnaissance va aussi à tous ceux qui ont collaboré de façon si sympathique de près ou de loin par leur bonne volonté et leur participation dévouées : techniciens, dessinateurs, photographes et secrétaires.

Nous voudrions aussi remercier Monsieur Faessel qui nous a toujours réservé le meilleur accueil et qui n'a jamais hésité à nous consacrer de longues heures pour nous prodiguer conseil et éclaircissements.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Gélivité des sols

Vu et approuvé :

Paris, le 7 Mars 1968

Le Doyen de la Faculté des Sciences de Paris,

Marc ZAMANSKY

Vu

et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE

S.D.T.B.T.P - 9, rue La Pérouse - Paris - 16e - IMPRIMERIE FIRMIN-DIDOT. – PARIS - MESNIL - IVRY – 1407.